unicef
for every child

Accelerated Learning Programme

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

για το Γυμνάσιο

ΟΔΗΓΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΔΔ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ & ΠΟΛΥΓΛΩΣΣΙΑΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Με αυτόν τον οδηγό, ως μέλη της συγγραφικής ομάδας των μαθηματικών, απευθυνόμαστε στον εκπαιδευτικό που πρόκειται να χρησιμοποιήσει το διδακτικό υλικό ταχύρρυθμης εκπαίδευσης για μαθηματικά γυμνασίου του προγράμματος “Accelerated Learning Materials Development & Teacher’s Capacity Building”. Το υλικό δημιουργήθηκε για παιδιά με προσφυγική εμπειρία.

Το υλικό σχεδιάστηκε σύμφωνα με τις παρακάτω **αρχές**:

- Απλοποίηση της γλώσσας χωρίς αλλοίωση των μαθηματικών εννοιών.
- Παρουσίαση των μαθηματικών εννοιών με όσο το δυνατόν περισσότερες αναπαραστάσεις, αφήγηση, εξεικόνιση, χρήση χειραπτικών υλικών κ.λπ.
- Συμπερίληψη πολιτισμικών στοιχείων από τις χώρες προέλευσης των παιδιών και προσαρμογή των προβλημάτων σε καθημερινές εικόνες.
- Έμφαση στην ομαδική εργασία μέσω ομαδικών δραστηριοτήτων και συζητήσεων.
- Ενθάρρυνση του μαθητή στη διερεύνηση και τον προβληματισμό με στόχο την ενεργή εμπλοκή του στη μάθηση.
- Έμφαση στις καινούριες έννοιες με πλαίσια και διαλόγους στις δραστηριότητες και στις διερευνήσεις.
- Ενίσχυση στην εκμάθηση της ελληνικής γλώσσας και μαθηματικής ορολογίας μέσα από τα πλαίσια «Οι λέξεις που έμαθα».
- Προτάσεις αξιοποίησης διαδικτυακού βοηθητικού υλικού στα Αγγλικά ανά θεματική έννοια με σκοπό την επιπλέον υποστήριξη του μαθητή.

Συνοπτικά, ο στόχος της συντακτικής ομάδας ήταν ένα ζωντανό υλικό, όσο το δυνατόν πιο προσιτό στη γλώσσα αλλά και στο μαθηματικό περιεχόμενο που θα ελκύσει και θα ενθαρρύνει τον πρόσφυγα μαθητή στην μάθηση.

Με σκοπό την υποστήριξη του εκπαιδευτικού στην υλοποίηση αυτού του υλικού με τον καλύτερο τρόπο, παρουσιάζονται στη συνέχεια ανά τροχιά και κεφάλαιο τα εξής:

- Συνοπτική περιγραφή της προσέγγισης που ακολουθήθηκε στο σχεδιασμό του μαθηματικού περιεχομένου.
- Αναφορά σε ποια σημεία θα πρέπει να δώσει ιδιαίτερη προσοχή ο εκπαιδευτικός και συμβουλές για την εφαρμογή κάποιων δραστηριοτήτων και ασκήσεων με γνώμονα την διαχείρισή τους ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες της τάξης.

Το βιβλίο θυμίζει σε πολλά σημεία φύλλο εργασίας. Οι λόγοι που επιλέξαμε αυτή τη μορφή ήταν για να χτίζονται σκαλωσιές μάθησης, οι μαθητές να είναι ενεργοί συμμετέχοντες και να υποστηρίζεται καλύτερα η αυτόνομη εργασία των μαθητών στις ομάδες. Για να έχει χρόνο ο εκπαιδευτικός να περνάει από τις ομάδες και να τις υποστηρίζει θα έπρεπε να υπάρχει βοήθεια μέσα στο βιβλίο. Αυτό όμως δημιουργεί το μειονέκτημα ότι σε αρκετές περιπτώσεις υπάρχει ισχυρή κατεύθυνση στον τρόπο που πρέπει να χρησιμοποιήσει ο μαθητής, για να λύσει ένα πρόβλημα ή μία άσκηση. Προτείνουμε, όπου είναι εφικτό από το πλαίσιο της τάξης, να θέτει ο εκπαιδευτικός το κρίσιμο ερώτημα της δραστηριότητας και να αφήνει τους μαθητές να λένε τις απόψεις τους και να επιχειρηματολογούν πάνω στις δικές τους ιδέες τους και στις ιδέες των άλλων. Η δραστηριότητα στο βιβλίο μπορεί να γίνεται στη συνέχεια ή να την κάνουν οι μαθητές στο σπίτι.

Οδηγίες για την τροχιά «Αριθμοί»

Οι φυσικοί αριθμοί

Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με κάποιες πτυχές των φυσικών αριθμών, λόγω ηλικίας και των εμπειριών που έχουν από την καθημερινότητα.

- Στην 1η παράγραφο (εισαγωγή) παρουσιάζεται ένας από τους τρόπους αναπαράστασης των φυσικών αριθμών με κυβάκια, ράβδους κλπ. Η συγκεκριμένη αναπαράσταση είναι σημαντική για να εξηγηθεί στην 2η παράγραφο η διαδικασία της κατακόρυφης αφαίρεσης δύο αριθμών.
- Στην 2η παράγραφο παρουσιάζονται οι πράξεις των φυσικών αριθμών.

  Συγκεκριμένα στη δραστηριότητα 2.1 παρουσιάζεται η διαδικασία της πρόσθεσης μέσω της ανάλυσης και σύνθεσης των αριθμών και η διαδικασία της κατακόρυφης πρόσθεσης. Φυσικά υπάρχουν και άλλοι τρόποι για την διαδικασία της πρόσθεσης, ίσως κα άτυπες μέθοδοι – στρατηγικές που μπορεί να έχουν αναπτύξει οι μαθητές, λόγω όμως χώρου και διδακτικού χρόνου για το κεφάλαιο δεν αναπτύχθηκαν.

  Στη δραστηριότητα 2.2 παρουσιάζεται η αφαίρεση μέσω της μεθόδου της συμπλήρωσης (μέθοδος που χρησιμοποιείται συχνά καθημερινά στον νοερό υπολογισμό για τα ρέστα που θα πάρει κάποιος). Οι αριθμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην αριθμογραμμή δεν είναι οι μοναδικοί, μπορεί κάποιος να πάει πρώτα στην πλησιέστερη δεκάδα (το 70) και μετά σε επόμενο αριθμό. Γι' αυτό ίσως να είναι καλό να προτείνουν οι μαθητές λύσεις για το πρόβλημα και να χρησιμοποιηθεί η αριθμογραμμή για την ανάλυση των λύσεων τους. Σε αυτή τη δραστηριότητα παρουσιάζεται και η μέθοδος της κατακόρυφης αφαίρεσης δύο αριθμών και γίνεται προσπάθεια εξήγησης της μεθόδου με το μοντέλο αναπαράστασης των αριθμών με κυβάκια, ράβδους κλπ.
- Στην 3η παράγραφο παρουσιάζεται η έννοια της δύναμης. Ίσως να είναι εντελώς άγνωστη έννοια για κάποιους μαθητές. Να δοθεί έμφαση στην ανάλυση της δύναμης σε γινόμενο ίσων παραγόντων και στην διαφορά που έχει αυτό από ένα άθροισμα με ίσους όρους. Προτείνεται να μην

χρησιμοποιεί ο διδάσκων την λέξη «φορές» όταν αναφέρεται σε ένα γινόμενο ίσων παραγόντων, γιατί αυτό παραπέμπει στον πολλαπλασιασμό ως άθροισμα ίσων όρων. Για παράδειγμα στο γινόμενο $2 \cdot 2 \cdot 2$ αντί για την ερώτηση «*πόσες φορές υπάρχει το 2 στο γινόμενο;*», να χρησιμοποιηθεί η ερώτηση «*πόσοι είναι οι παράγοντες σε αυτό το γινόμενο;*», μήπως και βοηθηθούν οι μαθητές να μην απαντούν εσφαλμένα ότι $2^3 = 6$, αντί του σωστού $2^3 = 8$.

Στην ίδια παράγραφο παρουσιάζεται και η προτεραιότητα των πράξεων. Αρκετές φορές οι μαθητές κάνουν λάθη, ίσως γιατί είναι συνηθισμένοι να «διαβάζουν» μία παράσταση σειριακά, από τα αριστερά προς τα δεξιά. Για παράδειγμα πολύ συχνά κάνουν λάθος σε παράσταση όπως η επόμενη: $2 + 3 \cdot 4$. Προτείνεται να δοθεί έμφαση σε απλές παραστάσεις και η πολυπλοκότητα να αυξάνεται σταδιακά, χωρίς να γίνει σκοπός οι πολύπλοκες παραστάσεις.

- Στην 4η παράγραφο παρουσιάζονται η Ευκλείδεια διαίρεση, οι διαιρέτες και τα πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού καθώς και τα κριτήρια διαιρετότητας.

  Στη δραστηριότητα 4.1 να γίνει και χρήση της αριθμομηχανής, όπως προτείνεται στο τέλος της δραστηριότητας, ώστε οι μαθητές α) να προσπαθήσουν να συνειδητοποιήσουν την διαφορά της Ευκλείδειας διαίρεσης από την διαίρεση στην οποία το πηλίκο είναι δεκαδικός αριθμός και β) το ακέραιο μέρος από τον δεκαδικό αριθμό που θα εμφανίσει η αριθμομηχανή μας επιτρέπει να βρούμε το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του διαιρέτη το οποίο δεν υπερβαίνει τον διαιρετέο και η διαφορά αυτού του πολλαπλάσιου από τον διαιρετέο είναι το υπόλοιπο.

- Στην 5η παράγραφο παρουσιάζονται οι πρώτοι αριθμοί, η ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και το ΕΚΠ και ο ΜΚΔ.

  Για την ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων παρουσιάζεται και η μέθοδος με το δεντροδιάγραμμα η οποία γενικά είναι πιο εύκολη για τους μαθητές. Η μέθοδος αυτή αξιοποιείται και για την εύρεση του ΕΚΠ και του ΜΚΔ δύο αριθμών.

Οι κλασματικοί αριθμοί

Η έννοια του κλάσματος παρ' ότι εισάγεται πολύ νωρίς στην εκπαιδευτική διαδικασία, έχει ιδιαίτερες δυσκολίες που έχουν να κάνουν με τις διαφορετικές εκφάνσεις του κλάσματος και τη διαχείρισή τους κατά τη διδασκαλία.

Το κεφάλαιο λαμβάνει υπόψη τις δυσκολίες των μαθητών όπως αυτές καταγράφονται στην έρευνα. Χρησιμοποιούνται μοντέλα και πλαίσια, γίνονται εκτιμήσεις, επιλύονται προβλήματα, επιχειρείται αντιμετώπιση των παρανοήσεων και γενικότερα στοχεύει στην διαδικαστική και εννοιολογική κατανόησή τους.

Βασικά χαρακτηριστικά:

- Αναπτύσσονται οι διαφορετικές εκφάνσεις του κλάσματος, ως μέρος – όλου, ως πηλίκο, ως μέτρο, ως λόγος και ως τελεστής. Για παράδειγμα, το $\frac{4}{5}$ μπορεί να έχει πέντε διαφορετικές εννοιολογικές πτυχές:

  - Να είναι η επιλογή των τεσσάρων μερών ενός όλου που χωρίστηκε σε 5 ίσα μέρη (ως μέρος – όλο).
  - Να είναι 4 αντικείμενα που χωρίστηκαν σε 5 άτομα (ως πηλίκο)
  - Να είναι 4 κορίτσια για κάθε 5 αγόρια (ως λόγος)
  - Το μήκος στην αριθμογραμμή του αντίστοιχου τμήματος (ως μέτρο)
  - Τα $\frac{4}{5}$των 25μαθητών της τάξης (ως τελεστής).

  Η κάθε μία από τις παραπάνω θεωρήσεις έρχεται και συμπληρώνει την άλλη αλλά ταυτόχρονα δίνει και μία διαφορετική θεώρηση για τα κλάσματα.

- Διαπραγματεύονται παρανοήσεις που καταγράφει η έρευνα όπως για παράδειγμα η μεταφορά και η χρήση ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών στους κλασματικούς.
- Ψηφιακά υπάρχει ένα πλούσιο υλικό με βίντεο και συνδέσμους σε μικροπειράματα που αναπτύσσουν τη μαθηματική σκέψη. Θα πρέπει να το μελετήσει ο εκπαιδευτικός και γνωρίζοντας το πλαίσιο της τάξης του να το αξιοποιήσει όπως εκείνος θεωρεί καλύτερα.

Πιο αναλυτικά:

➢ Στην παράγραφο ***«§1. Η έννοια του κλάσματος – Ισοδύναμα κλάσματα»*** οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του κλάσματος και στις τέσσερες πρώτες εκφάνσεις του. Ως μέρος – όλου, ως διαίρεση, ως μέτρο και ως λόγος. Εισάγονται στην έννοια του ισοδύναμου κλάσματος και στις ιδιότητές του. Για την απλοποίηση αποφύγαμε την διαγραφή των αριθμών γράφοντας από πάνω τα πηλίκα της διαίρεσης γιατί είναι αρκετά απαιτητικό σε αυτή τη φάση. Η ανάλυση των μαθητών και η διαγραφή ίδιων αριθμών θεωρούμε ότι είναι πιο εύκολη για τους μαθητές.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Στην 1.1-Α(στ) πιθανόν οι μαθητές να δυσκολευτούν γιατί τα μέρη δεν είναι ίσα αλλά ισοδύναμα. Είναι πιθανό να δώσουν ως απάντηση το $\frac{3}{9}$, αλλά ο εκπαιδευτικός να τους ζητήσει το κλάσμα να έχει αριθμητή το 1 και να συνεχίσει με ερωτήσεις όπως «Γιατί είναι $\frac{1}{3}$; Έχουν την ίδια επιφάνεια τα 3 μέρη;». Όμοια και στη 1.1-Α(ζ).
- Στην 1.1-Ε είναι σημαντικό να μπορούν να εκφράσουν το ίδιο κλάσμα με διαφορετικό τρόπο. Θα πρέπει να αναδείξει ο εκπαιδευτικός ότι τα μέρη μπορούν να είσαι ίσα αλλά και όχι, αρκεί όμως να είναι ισοδύναμα.
- Στην 1.2-Α μπορεί να τεθεί το αρχικό ερώτημα στους μαθητές: «Πώς θα βρούμε τι μέρος της πίτσας θα φάει ο καθένας;» και οι μαθητές να πουν τις ιδέες τους. Σε πόσα μέρη θα χωρίσουν την κάθε πίτσα; Πιθανόν κάποιος μαθητής θα αναφέρει τη διαίρεση κλπ.
- Την 1.2-Β θα κρίνει ο/η εκπαιδευτικός αν θα γίνει μέσα στην τάξη ή όχι. Το κεφάλαιο των δεκαδικών αριθμών είναι μετά τους κλασματικούς αριθμούς, αλλά οι μαθητές μπορεί να έχουν προηγούμενη σχολική εμπειρία και να τους είναι γνωστοί. Άλλωστε, αν έχουν διαπραγματευτεί το αρχικό κεφάλαιο με τους αριθμούς, οι μαθητές θα έχουν αναπτύξει την εννοιολογική δομή των δεκαδικών αριθμών.
- Η 1.3 δεν είναι απλή δραστηριότητα για τους μαθητές γιατί σχετίζεται με την κατανόηση του κλάσματος ως αριθμού και όχι ως σχέση μεταξύ δύο

άλλων αριθμών. Ίσως χρειαστούν περισσότερο χρόνο οι μαθητές απ’ ότι υπολογίζουμε.

- Η 1.5(ε) θέτει σε προβληματισμό τους μαθητές για την παρανόηση ότι οι ιδιότητες των ισοδύναμων κλασμάτων που έμαθαν για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ισχύει και για την πρόσθεση, αν προσθέσουμε δηλαδή τον ίδιο αριθμό σε αριθμητή και παρονομαστή θα προκύψει ισοδύναμο κλάσμα. Μπορεί να θέσει ο εκπαιδευτικός το ίδιο ερώτημα για την αφαίρεση. Έτσι, μπορούν οι ιδιότητες των ισοδύναμων κλασμάτων να παρουσιάζονται ταυτόχρονα, αυτές που ισχύουν (πολλαπλασιασμός και διαίρεση) και αυτές που δεν ισχύουν (πρόσθεση και αφαίρεση).
- Στην 1.5(στ) οι μαθητές έχουν το μέρος και πρέπει να σχεδιάσουν το όλο. Μια αρκετά απαιτητική για τους μαθητές δραστηριότητα που εμπλέκει εκτός από την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων, την έννοια του όλου.

➢ Στην παράγραφο ***«§2. Διάταξη και σύγκριση κλασμάτων»*** δίνεται ο ορισμός των ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων, συγκρίνουν και διατάσσουν κλάσματα σε 4 περιπτώσεις: με ίδιο παρονομαστή, με ίδιο αριθμητή, ετερώνυμα κλάσματα με διαφορετικό παρονομαστή και τέλος κάνουν σύγκριση με κοινό σημείο αναφοράς.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Στην 2.1(γ) θα πρέπει να αφήσουμε τους μαθητές να πουν τις ιδέες τους. Ο βασικός στόχος είναι να κατανοήσουν ότι μπορούμε να συγκρίνουμε κλάσματα αρκεί να αναφέρονται στο ίδιο όλο.
- Η 2.2(α) θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν το ρόλο του παρονομαστή σε ένα κλάσμα.
- Η λογική της 2.2(γ) είναι ίδια ακριβώς με την 2.1(γ)
- Στην 2.4(γ) διαπραγματεύονται μια παρανόηση, ότι σε δύο κλάσματα όταν λείπει ένα κομμάτι από το καθένα, τότε αυτά είναι ίσα. Οι μαθητές

συγκρίνουν το $\frac{1}{6}$και το$\frac{1}{8}$και αφού $\frac{1}{6}>\frac{1}{8}$οι διαφορές τους από τη μονάδα θα είναι το ανάποδο, δηλαδή $\frac{5}{6}<\frac{7}{8}$.

- Στις 2.4(δ) και 2.4 (ε) διαπραγματεύονται ένα πρόβλημα παρεμβολής και την πυκνότητα των κλασματικών αριθμών, δύσκολες έννοιες οι οποίες θα χρειαστούν διδακτικό χρόνο αλλά πολύ σημαντικές για την κατανόηση της διαφορετικής φύσης των κλασματικών αριθμών σε σχέση με τους φυσικούς.

➢ Στην παράγραφο ***«§3.Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων»*** αρχικά προσθέτουν και αφαιρούν ομώνυμα κλάσματα και στη συνέχεια ετερώνυμα κλάσματα.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Στην 3.1(γ) αναλύουν ένα κλάσμα σε άθροισμα δύο κλασμάτων. Ως επέκταση, μπορεί ο εκπαιδευτικός να ζητήσει να το αναλύσουν σε άθροισμα τριών κλασμάτων. Ή ως διαφορά δύο κλασμάτων.
- Η 3.2(δ) είναι αρκετά απαιτητική δραστηριότητα και είναι μια βασική παρανόηση των μαθητών. Πράγματι, αν βάλουν τις καραμέλες τους μαζί, έχει δίκιο ο Μουσταφά, αφού και οι δύο έχουν φάει τα $\frac{5}{10}$, το μισό δηλαδή από ένα σακουλάκι που περιέχει 10 καραμέλες, διαφορετικό όμως από τα προηγούμενα. Αυτό είναι διαφορετικό από το άθροισμα των δύο κλασμάτων. Για να προσθέσουμε δύο κλάσματα θεωρούμε δεδομένο ότι μιλάμε για την ίδια μονάδα. Με μονάδα το ένα σακουλάκι με 5 καραμέλες έχει νόημα το $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$και το αποτέλεσμα είναι φυσικά ένα ολόκληρο σακουλάκι που έχει 5 καραμέλες.

➢ Η παράγραφος***«§4. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση κλασμάτων»*** αρχικά διαπραγματεύεται τον πολλαπλασιασμό ενός φυσικού αριθμού με κλάσμα ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση του κλάσματος και τον πολλαπλασιασμό δύο κλασμάτων όπου με τη βοήθεια διαμερίσεων ενός τετραγώνου, οδηγούνται οι μαθητές στον κανόνα του πολλαπλασιασμού κλασμάτων. Ακολουθεί η διαίρεση φυσικού με κλάσμα ως πολλαπλασιασμό του φυσικού με τον αντίστροφο του κλάσματος και στη διαίρεση κλάσματος με κλάσμα όπου, αφού βρουν το αποτέλεσμα με τη βοήθεια σχήματος, οδηγούνται στον κανόνα της διαίρεσης. Αντιμετωπίζονται παρανοήσεις των μαθητών σχετικά με την αύξηση ενός αριθμού όταν πολλαπλασιάζουμε ή την μείωση όταν διαιρούμε. Τέλος αναπτύσσεται η έννοια του κλάσματος ως τελεστής ταυτόχρονα με την αναγωγή στην κλασματική μονάδα.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Στην 4.1(ε) είναι σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές ότι θα πρέπει να αναλύουν τους αριθμούς για να κάνουν απλοποιήσεις αντί να κάνουν τους πολλαπλασιασμούς και μετά τις απλοποιήσεις.
- Στην 4.1(στ) αντιμετωπίζεται μια παρανόηση των μαθητών, πως όταν πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό, αυτός μεγαλώνει, κάτι που δεν ισχύει για την περίπτωση των κλασμάτων.
- Στην 4.3(στ) όμοια, για την παρανόηση πως όταν διαιρούμε ο αριθμός μικραίνει.
- Στις 4.4(α) και (β) στόχος είναι να μπορούν να λύνουν προβλήματα χρησιμοποιώντας το κλάσμα ως τελεστή. Αναπτύσσεται ταυτόχρονα με την αναγωγή στην κλασματική μονάδα, επίσης μια σημαντική έννοια που θα πρέπει να κατακτήσουν οι μαθητές.
- Η 4.4(γ) είναι ένα πρόβλημα αρκετά απαιτητικό για τους μαθητές. Προτείνουμε να λυθεί και με τους 2 τρόπους. Με αναγωγή στην κλασματική μονάδα βρίσκοντας πόσο ζυγίζει το $\frac{1}{9}$, μετά τα $\frac{9}{9}$, το $\frac{1}{5}$ και τέλος τα $\frac{3}{5}$. Και με το κλάσμα ως τελεστή, διαιρώντας την τιμή του μέρους με το μέρος για να βρεθεί η τιμή του όλου $(460 : \frac{4}{9})$ και μετά πολλαπλασιάζοντας με τον τελεστή, δηλαδή $\frac{3}{5} \cdot (460 : \frac{4}{9})$.

Οι δεκαδικοί αριθμοί

Αυτή η ενότητα ξεκινάει με τα δεκαδικά κλάσματα, δίνοντας έμφαση στην οπτική παράστασή τους. Έπειτα, εισάγονται οι δεκαδικοί αριθμοί ως μία διαφορετική γραφή των δεκαδικών κλασμάτων ή των κλασμάτων που είναι ίσα με δεκαδικά κλάσματα. Είναι αναγκαίο να καταλάβουν οι μαθητές ότι δεν εισάγουμε καινούριους αριθμούς αλλά διαφορετική παράσταση για αριθμούς που γνωρίζουν ήδη.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται η σύγκριση και η διάταξη των δεκαδικών αριθμών, όπως και η αναπαράστασή τους σε αριθμογραμμή και οι τέσσερις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς.

Όσον αφορά τις πράξεις, η προσέγγιση γίνεται πρώτα με τα δεκαδικά κλάσματα και έπειτα παρουσιάζονται οι διαδικασίες εκτέλεσης κατακόρυφα όπως με τους φυσικούς, αλλά με έμφαση στην διαχείριση της υποδιαστολής. Πιο συγκεκριμένα, σχετικά με την αφαίρεση, δείχνουμε σε αυτό το υλικό τον τρόπο που μειώνεται ο αφαιρετέος κατά μία μονάδα, όταν χρειάζεται, και όχι το να αυξηθεί ο αφαιρέτης. Επιπλέον, σχετικά με τη διαίρεση δύο δεκαδικών αριθμών, προτείνεται σε αυτό το υλικό ο τρόπος που να μετατραπούν και ο διαιρέτης και ο διαιρετέος σε φυσικούς αριθμούς και όχι μόνο ο διαιρέτης. Ο λόγος γι' αυτόν τον τρόπο είναι ότι θεωρείται πιο απλός για τους μαθητές στους οποίους απευθύνεται αυτό το υλικό. Να σημειώσουμε εξίσου ότι σχετικά με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση ενός δεκαδικού αριθμού με 10, είναι αναγκαίο να δοθεί η έμφαση στην αξία των ψηφίων και όχι μόνο στη θέση της υποδιαστολής. Πιο συγκεκριμένα, για τον πολλαπλασιασμό, είναι σημαντικό να γίνει κατανοητό ότι η υποδιαστολή «μετακινείται δεξιά» επειδή ο αριθμός «μεγαλώνει» 10 φορές (κάθε ψηφίο παίρνει αξία 10 φορές πιο μεγάλη). Παρομοίως για τη διαίρεση, η υποδιαστολή «μετακινείται αριστερά» επειδή κάθε ψηφίο παίρνει αξία 10 φορές πιο μικρή.
Τέλος, παρουσιάζονται τα ποσοστά, τη σημασία τους και το πώς γράφονται ως κλάσμα και ως δεκαδικός αριθμός. Στην συνέχεια, προτείνονται δύο εφαρμογές με τα ποσοστά: να υπολογιστεί ένας λόγος ως ποσοστό, και να υπολογιστεί το ποσοστό μιας ποσότητας.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

Δραστηριότητα 1.2	Το ισοδύναμο δεκαδικό κλάσμα που ζητείται δεν είναι μοναδικό. Οι διαφορετικές απαντήσεις των μαθητών μπορεί να αποτελέσουν αφορμή για περεταίρω εμβάθυνση στα ισοδύναμα κλάσματα.
Δραστηριότητα 1.3	Για καλύτερη κατανόηση, είναι ιδιαίτερα σημαντικό, να ζητήσει ο εκπαιδευτικός από τους μαθητές να δώσουν τα δικά τους παραδείγματα και να τα σχεδιάσουν όπως στη δραστηριότητα.
Δραστηριότητα 1.4	Να σημειωθεί από τον εκπαιδευτικό ότι τα μεγάλα τετράγωνα (της μονάδας) είναι ίσα. Επίσης, να αναφερθεί ότι όταν χωρίζει το μεγάλο τετράγωνο σε 10 μέρη, αυτά τα μέρη είναι ίσα. Το ίδιο και όταν το χωρίζει σε 100 μικρά τετράγωνα. Επιπλέον, θα είναι καλό να γίνει μία συζήτηση και ερμηνεία για τη σημασία του δεκαδικού μέρους ως «κομμάτι» της μονάδας.
Παραδείγματα για τους δεκαδικούς αριθμούς	2) Να γίνει μία συζήτηση για το μηδέν στο τέλος του δεκαδικού μέρους. 4) Να σημειωθεί ότι σ' έναν δεκαδικό αριθμό, το δεκαδικό μέρος πρέπει να αποτελείται από συγκεκριμένο αριθμό ψηφίων.
Δραστηριότητα 2.2	Να ζητηθεί από κάθε μαθητή, αφού ολοκληρώνεται η δραστηριότητα, να γράψει με δικά του λόγια τους κανόνες για τη σύγκριση δύο δεκαδικών αριθμών ή να τους δείξει με παραδείγματα.
Δραστηριότητα 4.1- Α)	Η προσέγγιση που προτείνεται στο πρώτο μέρος αυτής της δραστηριότητας έχει σκοπό την κατανόηση μέσω δεκαδικών κλασμάτων τη διαδικασία της πρόσθεση. Δεν προτείνεται όμως να χρησιμοποιηθεί ως μέθοδος εκτέλεσης.

Δραστηριότητα 5.5	Η αναφορά σε ισοδύναμα κλάσματα μπορεί να είναι βοηθητική σ' αυτήν τη δραστηριότητα.
Εφαρμογή 6.1 & Εφαρμογή 6.2	Προτείνεται να γίνουν αυτές οι εφαρμογές ως ομαδική εργασία.

Οι ακέραιοι αριθμοί

Η κατανόηση των ακέραιων αριθμών και των πράξεών τους είναι πάρα πολύ σημαντική, για την συνέχεια των μαθητών στην Άλγεβρα.

Για την εννοιολογική κατανόηση των πράξεων των ακεραίων αριθμών χρησιμοποιήθηκαν δύο μοντέλα που προτείνει η έρευνα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν με συνέπεια και στις τέσσερις πράξεις. Το μοντέλο των θετικών – αρνητικών μετρητών (ως θετικές – ανρητικέςκάρτες) και το μοντέλο της κίνησης στην αριθμογραμμή. Το δεύτερο μοντέλο χρησιμοποιήθηκε στο βιβλίο στην πρόσθεση, ενώ για τις υπόλοιπες πράξεις μπορεί να το βρει ο εκπαιδευτικός στο επιπλέον υλικό που υπάρχει ψηφιακά.

Στο ψηφιακό υλικό εκτός από τα βίντεο και τους συνδέσμους σε μικροπειράματα υπάρχει ένα πλούσιο υλικό με δραστηριότητες που αναπτύσσουν τη μαθηματική σκέψη. Θα πρέπει να τις μελετήσει ο εκπαιδευτικός και γνωρίζοντας το πλαίσιο της τάξης του να το αξιοποιήσει όπως εκείνος θεωρεί καλύτερα.

Πιο αναλυτικά:

- Στην παράγραφο ***«§1. Η έννοια των ακεραίων αριθμών – Αριθμογραμμή – Διάταξη και σύγκριση ακεραίων»*** γίνεται η εισαγωγή στους αρνητικούς αριθμούς, στην τοποθέτησή τους στην αριθμογραμμή, στις έννοιες του αντίθετου αριθμού και της απόλυτης τιμής και στη διάταξη και σύγκριση ακεραίων. Η μετάβαση στην αριθμογραμμή γίνεται μέσα από το θερμόμετρο μια και υπάρχει από τους μαθητές η βιωματική εξοικείωση.
- Στην παράγραφο ***«§2. Πρόσθεση ακεραίων»*** αναπτύσσεται η πρόσθεση των ακεραίων με τα δύο μοντέλα. Προτείνουμε να χρησιμοποιηθούν και τα δύο μοντέλα (θετικές-αρνητικές κάρτες, κίνηση στην αριθμογραμμή) και η μετάβαση στους τυπικούς κανόνες να γίνει, αφού οι μαθητές μπορούν να βρίσκουν το αποτέλεσμα της πρόσθεσης και με τα δύο μοντέλα. Στους τυπικούς κανόνες είναι δύσκολη η χρήση της έννοιας της απόλυτης τιμής ακόμα και για τους μαθητές που γνωρίζουν καλά την ελληνική. Γι' αυτό προτείνουμε εναλλακτικά να την χρησιμοποιούν ως απόσταση από το 0.

Για την καλύτερη κατανόηση των μοντέλων προτείνουμε να εκτυπωθούν θετικές και αρνητικές κάρτες (τελευταία σελίδα) και να μοιράζονται στους μαθητές όταν μελετούνται αντίστοιχα προβλήματα. Για την κίνηση στην αριθμογραμμή προτείνουμε να σχεδιαστεί μία αριθμογραμμή στο πάτωμα και ένας (εκπαιδευτικός ή μαθητής) να κινείται πάνω στην αριθμογραμμή όταν μελετούνται αντίστοιχα προβλήματα.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Στο 2.1(α) θα πρέπει οι μαθητές να κατανοήσουν ότι ίδιος αριθμός θετικών και αρνητικών καρτών δίνει 0. Αυτό θα χρησιμοποιηθεί και ανάποδα, ως «πρόσθεση από το τίποτα» στην αφαίρεση. Δίνεται στην εκφώνηση ότι 3 θετικές και 3 αρνητικές αλληλοαναιρούνται (προκειμένου να ενεργοποιήσει τους μαθητές που αδυνατούν να το σκεφτούν και δουλεύουν αυτόνομα) αλλά θα ήταν προτιμότερο να ρωτήσει ο εκπαιδευτικός όλη την τάξη για το σκορ της Α΄ ομάδας, πριν ακόμα το διαβάσουν οι μαθητές.
- Στην 2.1(γ) αναλύονται οι δύο εκφάνσεις των “+” ως πράξη και ως πρόσημο. Επιλέξαμε να είναι το ίδιο σύμβολο, για λόγους συμβατότητας με τα σχολικά βιβλία.
- Η 2.2 (δ) μπορεί να γίνει μαζί με την 2.3 (γ) και (δ). Δηλαδή οι μαθητές να μάθουν να κάνουν προσθέσεις σε ομόσημους και ετερόσημους με τα μοντέλα και μετά να συζητηθούν και να εξασκηθούν στους κανόνες. Σε μεγάλα κείμενα, όπως στην 2.2(δ) ίσως θα είναι πιο εύκολο για τους μαθητές να λέει ο καθηγητής τα ερωτήματα αντί να τα διαβάζουν οι ίδιοι.
- Στην 2.4, στο «προσοχή» θα ήταν προτιμότερο να ρωτήσει ο εκπαιδευτικός τι αριθμός είναι το –α και να αφήσει τους μαθητές να πουν τις απόψεις τους. Το ίδιο ακριβώς ερώτημα τίθεται και στην επόμενη παράγραφο.

➢ Η παράγραφος ***«§3. Αφαίρεση ακεραίων»*** είναι αρκετά απαιτητική, γιατί εκτός από την νοηματοδότηση της αφαίρεσης και την κατανόηση ότι η αφαίρεση είναι ισοδύναμη με την πρόσθεση του αντίθετου αριθμού, έχει και την απαλοιφή παρενθέσεων όπου αλλάζει ριζικά όλη η αναπαράσταση των αριθμητικών παραστάσεων. Στο επιπλέον ψηφιακό υλικό, υπάρχει και το μοντέλο της κίνησης στην αριθμογραμμή όπου η αφαίρεση νοηματοδοτείται με την αλλαγή κατεύθυνσης του ρομπότ. Προτείνουμε να διαπραγματευτεί και αυτό το μοντέλο, ο εκπαιδευτικός όμως θα κρίνει το διδακτικό χρόνο που θα αφιερώσει γι'αυτό.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Στην 3.1 είναι ξανά η διαπραγμάτευση του πρόσημου του –α. Αν έγινε η συζήτηση στην 2.4 εδώ απλώς να ξαναειπωθεί από τους μαθητές.
- Στην 3.2(α) κάνουν οι μαθητές την «πρόσθεση από το τίποτα». Θα μπορούσε να μην δοθεί η σκέψη που παρουσιάζεται μέσα από την αφήγηση αλλά να τεθεί το ερώτημα τι μπορεί να κάνει ο καθηγητής για να πάρει τρεις αρνητικές κάρτες από μία ομάδα που έχει 2 θετικές.
- Και στην 3.2(γ) μπορεί να τεθεί το ερώτημα «*υπάρχει άλλη πράξη που μπορούμε να κάνουμε ώστε η βαθμολογία από +2 να γίνει +5;*» στους μαθητές και να γίνει συζήτηση μέσα στην τάξη, πριν δουν οι μαθητές την απάντηση που υπάρχει στο βιβλίο.
- Στην 3.3 ζητείτε μια ερμηνεία των διαφορετικών εκφάνσεων των συμβόλων "+" και "-". Θεωρούμε απαραίτητη την κατανόησή της, για το επόμενο στάδιο.
- Στην 3.4 είναι σημαντικό να κατανοήσουν ότι στην νέα μορφή των αριθμητικών παραστάσεων το «+» ή «-» ανάμεσα στους αριθμούς δεν δείχνει πράξη αλλά είναι το πρόσημο του επόμενου αριθμού και η πράξη που κάνουμε είναι πάντα πρόσθεση.

➢ Στις παραγράφους ***«§4. Πολλαπλασιασμός ακεραίων»*** και ***«§5. Διαίρεση ακεραίων»*** εισάγονται στις έννοιες με το μοντέλο των θετικών-αρνητικών καρτών. Το μοντέλο της αριθμογραμμής υπάρχει στο ψηφιακό υλικό και προτείνεται να γίνει μέσα στην τάξη από τον εκπαιδευτικό αν και εφόσον ο χρόνος το επιτρέπει.

Οι ρητοί αριθμοί

Στο κεφάλαιο των ρητών οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια του ρητού αριθμού, την πυκνότητά τους, τη σύγκριση και τη διάταξη των ρητών, επεκτείνουν τις πράξεις των ακεραίων στους ρητούς και εισάγονται στις ιδιότητες των δυνάμεων με φυσικό και ακέραιο εκθέτη.

Πιο αναλυτικά:

- Στην παράγραφο ***«§1. Η έννοια του ρητού-Σύγκριση και διάταξη ρητών»*** οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του ρητού. Διακρίνουν τους δεκαδικούς αριθμούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς ως εκφράσεις ενός κλασματικού αριθμού. Διαπραγματεύονται τις σχέσεις εγκλεισμού των φυσικών, ακεραίων και ρητών αριθμών. Τοποθετούν ρητούς αριθμούς στην αριθμογραμμή και διατάσσουν ρητούς αριθμούς. Συζητούν για την πυκνότητα των ρητών αριθμών και την έννοια του επόμενου και προηγούμενου αριθμού. Τέλος, επεκτείνουν τις γνωστές έννοιες του αντίθετου αριθμού και της απόλυτης τιμής από τους ακεραίους, στους ρητούς.

- Στην παράγραφο ***«§2. Πράξεις ρητών αριθμών»*** επεκτείνουν τις πράξεις των ακεραίων, στους ρητούς κάνοντας πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα. Εφαρμόζουν την προτεραιότητα των πράξεων στους ρητούς.

- Στην παράγραφο ***«§3.Δυνάμεις ρητών και ιδιότητες των δυνάμεων ρητών αριθμών»*** οι μαθητές υπολογίζουν δυνάμεις ρητών αριθμών και εισάγονται στις ιδιότητες των δυνάμεων με φυσικούς και ακέραιους εκθέτες. Μέσα από παραδείγματα οι μαθητές “ανακαλύπτουν” τις ιδιότητες και στη συνέχεια τις αποδεικνύουν.

Οι άρρητοι αριθμοί

Στην ενότητα αυτή αναπτύσσονται οι έννοιες της τετραγωνικής ρίζας και των άρρητων αριθμών.

Για την έννοια της τετραγωνικής ρίζας έχει δοθεί έμφαση και στην γεωμετρική ερμηνεία της, δηλαδή ότι αν έχουμε ένα τετράγωνου εμβαδού Ε τότε η πλευρά του είναι $\sqrt{E}$. Γι' αυτό στη δραστηριότητα 1.2 οι μαθητές καλούνται να βρουν πρώτα τα εμβαδά κάποιων τετραγώνων και μετά τις πλευρές τους. Αυτή η δραστηριότητα αποτελεί την αφορμή για τη δραστηριότητα που ακολουθεί στην επόμενη παράγραφο (§2 άρρητοι αριθμοί) και τον αριθμό $\sqrt{2}$.

Στην επόμενη ενότητα οι μαθητές εμπλέκονται με την λύση της εξίσωσης $x^2 = a$.

Οδηγίες για την τροχιά «Άλγεβρα»

Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις είναι ίσως από τις πιο σημαντικές και πιο δύσκολες έννοιες που διαπραγματεύονται οι μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το κεφάλαιο των συναρτήσεων θέτει τις θεμελιώδεις έννοιες στις συναρτήσεις λαμβάνοντας υπόψη τις δυσκολίες των μαθητών που καταγράφει η έρευνα. Μέσα από καθημερινά προβλήματα που μοντελοποιούνται, αναδεικνύει τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης και τις μεταβάσεις από μία μορφή αναπαράστασης σε άλλη, χρησιμοποιεί τις κανονικότητες για την εισαγωγή της έννοιας της συνάρτησης, διαπραγματεύεται συναρτήσεις που η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές και άλλες που η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ένα συνεχές σύνολο, οι μαθητές εξάγουν συμπεράσματα από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, εξετάζονται αναλυτικότερα οι συναρτήσεις $y=αx$ και $y=αx+β$ αναδεικνύοντας την έννοια της κλίσης μιας ευθείας, και τέλος μελετάται η συνάρτηση $y=α/x$ ώστε να αποφευχθεί η παρανόηση της γραμμικότητας ως βασικό χαρακτηριστικό μιας συνάρτησης. Η έννοια της μεταβλητής αναπτύσσεται αναλυτικά στο κεφάλαιο των εξισώσεων α΄ βαθμού. Η συνάρτηση μελετάται σε ένα λειτουργικό – διαδικαστικό επίπεδο αλλά και στο επίπεδο της συνάρτησης – αντικείμενο.

Στο ψηφιακό υλικό εκτός από τα βίντεο και τους συνδέσμους σε μικροπειράματα, υπάρχει ένα πολύ πλούσιο υλικό με δραστηριότητες που αναπτύσσουν τη μαθηματική σκέψη. Θα πρέπει να τις μελετήσει ο εκπαιδευτικός και γνωρίζοντας το πλαίσιο της τάξης του να το αξιοποιήσει όπως εκείνος θεωρεί καλύτερα.

Πιο αναλυτικά:

- Η παράγραφος ***«§1. Σύστημα αξόνων»*** είναι μια εισαγωγική παράγραφος για την αναπαράσταση σημείων στο καρτεσιανό επίπεδο. Εισάγονται στην εύρεση της θέσης ενός σημείου στο καρτεσιανό επίπεδο, ως κίνηση από το σημείο (0,0) πρώτα στον άξονα του x΄x (δεξιά - αριστερά) (ώστε να ταυτιστεί με την αναγραφή πρώτα της τετμημένης) και μετά στον y΄y (πάνω – κάτω). Αποφεύγονται οι λέξεις τετμημένη και τεταγμένη που είναι πολύ δύσκολες ακόμα και για μαθητές που γνωρίζουν καλά την ελληνική και ονομάζονται x-συντεταγμένη και y-συντεταγμένη.

- Η παράγραφος ***«§2. Ποσά ανάλογα και ποσά αντιστρόφως ανάλογα»*** εισάγει τις προ-αλγεβρικές έννοιες των ανάλογων και αντιστρόφων ανάλογων ποσών. Στα ανάλογα ποσά εκτός από την ιδιότητα του σταθερού λόγου $\frac{y}{x}$ =α ζητείται από τους μαθητές να γράψουν και τη σχέση αλληλοεξάρτησης y=αx, για την πιο ομαλή μετάβαση στις συναρτήσεις. Η γραφική παράσταση των αντιστρόφων ανάλογων ποσών υπάρχει στο ψηφιακό υλικό (7.4).

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Στο 2.2(β) είναι σημαντικό να συμπληρώνουν έναν πίνακα ανάλογων ποσών παρατηρώντας τις σχέσεις οριζόντια και κατακόρυφα. Να χρησιμοποιούν δηλαδή είτε τον ορισμό των ανάλογων ποσών ή την ιδιότητα του σταθερού λόγου.
- Στην 2.3 γίνεται προσπάθεια να αναδειχθεί μια σημαντική παρανόηση για τα ανάλογα ποσά, της αύξησης δύο ποσών κατά την ίδια τιμή.
- Η 2.4 διαπραγματεύεται διαισθητικά τη γραφική παράσταση δύο ανάλογων ποσών ως ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- Στη 2.5 δίνονται τρεις γραφικές παραστάσεις που θα πρέπει αρχικά να συνδέσουν τον τύπο της σχέσης των δύο ποσών και στη συνέχεια να παρατηρήσουν ότι ο συντελεστής αναλογίας δείχνει τη μεταβολή του y όταν το x αυξάνεται κατά 1.
- Οι 2.6(γ) και 2.6(δ) αφορούν την επίλυση προβλημάτων χρησιμοποιώντας την αναλογία και την επίλυση εξίσωσης.

- Στην παράγραφο ***«§3.Η έννοια της συνάρτησης»*** αρχίζει να οικοδομείται σταδιακά η έννοια της συνάρτησης. Αρχικά, με τη συνάρτηση ως «μηχανή» χρησιμοποιώντας την διαγραμματική αναπαράσταση (3.1) και εισάγοντας την ορισμό της συνάρτησης ως μία ειδική μορφή σχέσης. Στην 3.2 αναπτύσσεται περισσότερο ο τύπος μιας συνάρτησης και η εύρεση του τύπου από αριθμητικά μοτίβα. Στην 3.3 μέσα από ένα πρόβλημα (με συνεχείς τιμές) και ένα γεωμετρικό μοτίβο (με διακριτές τιμές) αναδεικνύονται όλες οι αναπαραστάσεις μίας συνάρτησης.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Στο τέλος της 3.1 δίνεται ο ορισμός της συνάρτησης. Μία από τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι η αναγνώριση μιας σχέσης ως συνάρτηση, με βάση τον ορισμό. Είναι σημαντικό να διαπραγματευτούν οι μαθητές τη δραστηριότητα 7.6 στο ψηφιακό υλικό, εφόσον φυσικά κρίνει ο εκπαιδευτικός ότι έχει νόημα γνωρίζοντας το πλαίσιο της τάξης του.
- Στην 3.3 - 1η(ε) είναι καλό να τεθεί το ερώτημα αν μπορούμε να ενώσουμε τα σημεία, πριν διαβάσουν οι μαθητές την άποψη του Μαχμούντ.
- Στην 3.4 οι μαθητές αντλούν πληροφορίες από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης θερμοκρασίας και εισάγονται διαισθητικά σε σημαντικές έννοιες των συναρτήσεων.

➢ Στην παράγραφο ***«§4.Η συνάρτηση y=αx»*** εισάγονται στη έννοια της γραμμικής συνάρτησης y=αx συνδέοντάς την αρχικά ως ποσά ανάλογα. Χαράσσουν τη γραφική παράσταση δύο συναρτήσεων και τέλος βρίσκουν από τη γραφική παράσταση τον τύπο της συνάρτησης.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Στην 4.2 περιμένουμε ότι θα σκεφτούν οι μαθητές ότι ο λόγος y/x είναι σταθερός. Αν δυσκολεύονται, τους ζητάμε να ξαναδούν την προηγούμενη δραστηριότητα 4.1(α). Για το επόμενο ερώτημα μπορούν να θέσουν x=0 και να βρουν ότι y=0.
- Στο πλαίσιο, για την ερώτηση «Το α ονομάζεται **κλίση** της ευθείας και δείχνει πόσο αλλάζει το ____ όταν το x __________ κατά ___.» θυμίζουμε τη δραστηριότητα 2.5.
- Στην 4.4(γ) περιμένουμε ότι θα αναδειχθούν μέσα στην τάξη δύο τουλάχιστον στρατηγικές. Να βρουν το α από την μεταβολή του y όταν το x αυξάνεται κατά 1 ή να θέσουν στον τύπο y=αx τις συντεταγμένες ενός

σημείου από το οποίο διέρχεται η ευθεία. Καλό είναι να αναδειχθούν μέσα στην τάξη και οι δύο στρατηγικές.

Στην παράγραφο ***«§5.Η συνάρτηση y=αx+β»*** εισάγονται στη γραμμική συνάρτηση y=αx+β ως παράλληλη μεταφορά της y=αx. Αναδεικνύεται ο ρόλος της κλίσης που διαπραγματεύτηκαν και στις προηγούμενες παραγράφους και ο ρόλος του β ως η τεταγμένη του σημείου που τέμνει η ευθεία τον άξονα y΄y. Χαράζουν τη γραφική παράσταση μιας γραμμικής συνάρτησης με την εύρεση δύο σημείων της και επαληθεύουν τη γραφική παράσταση γνωρίζοντας το ρόλο των α και β.

Η παράγραφος ***«§6.Η συνάρτηση y=α/x»*** είναι σύντομη με βασικό στόχο να εξετάσουν οι μαθητές πιο αναλυτικά μια συνάρτηση που δεν είναι γραμμική.

Αλγεβρικές παραστάσεις

Στην ενότητα αυτή αναπτύσσονται οι αλγεβρικές πράξεις.

Υπάρχουν δύο σημαντικές διαφοροποιήσεις από τον συνηθισμένο τρόπο που αναπτύσσονται και παρουσιάζονται οι αλγεβρικές πράξεις.

- Δίνεται έμφαση στην επιμεριστική ιδιότητα και την παρουσίασή της με την μέθοδο του πίνακα, που ουσιαστικά είναι μια επέκταση της γεωμετρικής της αναπαράστασης, ώστε να μπορούν να συμπεριληφθούν και παραστάσεις που μπορεί να εκφράζουν αρνητικούς αριθμούς. Αυτό ξεκινάει από τις δραστηριότητες 1.4 και 1.5 και διατρέχει τις περισσότερες από τις δραστηριότητες και τις έννοιες - μεθόδους που αναπτύσσονται π.χ. ταυτότητες , παραγοντοποίηση.

  Η μέθοδος του πίνακα δοκιμάστηκε στην σχολική τάξη και βρέθηκε ότι βοηθάει κυρίως τους αδύναμους και μέτριους μαθητές.
- Γίνεται παρουσίαση και προσπάθεια σύνδεσης μεθόδου παραγοντοποίησης αμέσως μετά την παρουσίαση της μεθόδου πολλαπλασιασμού π.χ. πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων και η παραγοντοποίηση με την μέθοδο της ομαδοποίησης ή μετά την παρουσίαση της αντίστοιχης ταυτότητας π.χ. ανάπτυγμα τετραγώνου διωνύμου.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

Στη δραστηριότητα 1.2 παρουσιάζεται η έννοια των ίσων ή ισοδύναμων αλγεβρικών παραστάσεων. Πολλές φορές οι μαθητές κάνουν λάθη όπως για παράδειγμα γράφουν $3x + 2 = 5x$, μπορούν όμως να ελέγξουν αν ισχύει η ισότητα βάζοντας στην θέση του x δύο τιμές π.χ. χ=1 και χ=2. Για χ=1 η ισότητα ισχύει ενώ για χ=2 δεν ισχύει. Το προηγούμενο μπορεί να γίνει αφορμή για την διάκριση εξίσωσης και ίσων αλγεβρικών παραστάσεων.

Στη δραστηριότητα 1.5 χρησιμοποιείται για πρώτη φορά η μέθοδος του πίνακα. Καλό είναι οι μαθητές να θυμηθούν (ή να μάθουν) ότι για παράδειγμα το $x - 1$ σημαίνει $x + (-1)$.

Στη δραστηριότητα 2.3 (πολλαπλασιασμός πολυωνύμων) παρουσιάζονται 2 μέθοδοι ο πολλαπλασιασμός με ανάλυση των δυνάμεων με βάση τον ορισμό και ο πολλαπλασιασμός με χρήση ιδιότητας των δυνάμεων. Είναι χρήσιμο οι μαθητές να συνδέουν αυτά τα δύο.

Μετά από τον πολλαπλασιασμό μονωνύμου με πολυώνυμο παρουσιάζεται η μέθοδος παραγοντοποίησης του κοινού παράγοντα με την μέθοδο του πίνακα. Ενδέχεται όμως κάποιοι μαθητές να μπορούν να κάνουν την παραγοντοποίηση χωρίς την χρήση του πίνακα. Η παρουσίαση και των δύο τρόπων θα βοηθήσει σιγά σιγά κάποιους από τους υπόλοιπους μαθητές να γίνουν ανεξάρτητοι από την μέθοδο του πίνακα. Επίσης οι ταυτότητες παρουσιάζονται με την μέθοδο του πίνακα και με την συνηθισμένη, οπότε και σε αυτή την περίπτωση η παρουσίαση και των δύο τρόπων ενδέχεται να βοηθήσει τους μαθητές να συνδέσουν τις δύο μεθόδους.

Εξίσωση & Ανίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο

Για την ενότητα Εξίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο, θεωρείται βασικό αρχικά να αντιληφθεί η έννοια της ισότητας ως σχέση ισοδυναμίας μεταξύ του δεξιού και του αριστερού μέλους της ισότητας. Με άλλα λόγια, τα δύο μέλη μιας ισότητας είναι διαφορετικές εκφράσεις για τον ίδιο αριθμό. Επίσης, η ενότητα Ανίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο, ξεκινάει με την σημασία του συμβόλου της ανισότητας και οι μαθητές εξοικειώνονται με τις ανισοτικές σχέσεις των αριθμών και τις συνδέουν με τη θέση τους στην αριθμογραμμή. Έπειτα, χρησιμοποιώντας τον μοντέλο της τραμπάλας, εισάγονται οι ιδιότητες της ισότητας και αντίστοιχα της ανισότητας. Το μοντέλο της τραμπάλας χρησιμοποιείται επίσης για την εισαγωγή της έννοιας της εξίσωσης και της ανίσωσης. Μεγάλη έμφαση θα πρέπει να δοθεί στις ιδιότητες της ισότητας και της ανισότητας, όπως και στην αναπαράσταση μιας εξίσωσης με μία ισορροπία σε μία τραμπάλα (και αντίστοιχα για την ανίσωση).

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η επίλυση της εξίσωσης 1ου βαθμού πρώτα της μορφής $αx+β = γ$ και έπειτα της μορφής $αx+β = γx+δ$ (και αντίστοιχα για την ανίσωση). Η επίλυση των εξισώσεων, και των ανισώσεων, γίνεται με εφαρμογή ιδιοτήτων της ισότητας (και αντίστοιχα της ανισότητας). Σχετικά με την κλασσική μέθοδο που αναφέρεται στη μεταφορά των όρων από ένα μέλος στο άλλο με ταυτόχρονη αλλαγή του πρόσημου, δεν συνιστάται η εφαρμογή της παρότι είναι πρακτική. Ο λόγος γι' αυτήν την σύσταση είναι η αποφυγή εφαρμογής μηχανικά ενός μνημονικού κανόνα που αποκρύπτει τον μαθηματικό νόημα της διαδικασίας.

Επιπλέον, οι μαθητές εμπλέκονται σε μοντελοποίηση καταστάσεων με εξισώσεις, της μορφής $αx+β=γ$ και της μορφής $αx+β=γx+δ$, αντίστοιχα και για τις ανισώσεις. Η επίλυση των προβλημάτων είτε με εξίσωση είτε με ανίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή λόγω των χαρακτηριστικών της τάξης στην οποία απευθύνεται αυτό το υλικό. Πιο συγκεκριμένα, μεγάλη έμφαση θα πρέπει να δοθεί στην 'μετάφραση' από την 'καθημερινή γλώσσα' στην 'μαθηματική γλώσσα' και στην ερμηνεία των λύσεων.

Τέλος, ας σημειωθεί ότι παρόλο που χρησιμοποιείται η ίδια διαδικασία στην επίλυση της εξίσωσης και της ανίσωσης 1ου βαθμού με έναν άγνωστο, είναι αναγκαίο να δοθεί έμφαση στις διαφορές μεταξύ εξίσωσης και ανίσωσης σχετικά με τη σημασία και με το σύνολο λύσεων. Η αναπαράσταση των λύσεων ανίσωσης στην αριθμογραμμή είναι χρήσιμη για την υλοποίηση αυτού του στόχου. Το ίδιο ισχύει και για την επίλυση προβλημάτων με εξίσωση ή με ανίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο όπου μεγάλη έμφαση πρέπει να δοθεί στην διαφορετική ερμηνεία της εξίσωσης ή της ανίσωσης σχετικά με το πλαίσιο του προβλήματος.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

● Στην ενότητα *Εξίσωση 1^{ου} βαθμού με έναν άγνωστο*,

Δραστηριότητα 2.2, Α)	Ιδιαίτερη προσοχή στη διαχείριση αυτής της άσκησης που μπορεί να προκαλέσει μία σύγχυση στους μαθητές. Να δοθεί έμφαση στη σημασία της ισορροπίας.
Άσκηση 2.2	Ως συνέχεια γι' αυτήν την άσκηση, μπορεί ο εκπαιδευτικός να δώσει την εξίσωση και να ζητήσει από τους μαθητές να την παρουσιάσουν αντίστοιχα με μία τραμπάλα.
Δραστηριότητα 3.1, Β)	Σημαντικό εδώ να γίνει κατανοητό το ότι προσθέτουμε στα δύο μέλη τον αντίθετο του 2, που είναι (-2), και όπως το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν γι' αυτό 'εξαφανίζεται' το 2 από το 1^{ο} μέλος.
Δραστηριότητα 4.1	Σημαντικό είναι να γίνουν τα βήματα παράλληλα, με το μοντέλο της τραμπάλας και αλγεβρικά, για την κατανόηση του μαθηματικού νοήματος της διαδικασίας.
Δραστηριότητα 4.2	Ο σκοπός αυτής της δραστηριότητας είναι να αποκαλύψει ο μαθητής ότι για την επίλυση μιας εξίσωσης μορφής αx+β=γx+δ, γενικά δεν αρκεί η διαδικασία δοκιμής και ελέγχου και ότι υπάρχει ανάγκη για πιο γενικευμένη μέθοδο επίλυσης. Θα

	πρέπει να γίνει φανερός αυτός ο σκοπός στους μαθητές.
Άσκηση 4.1	Σ' αυτήν την άσκηση, είναι σημαντική η κάθε προσπάθεια του μαθητή, και σε περίπτωση δυσκολίας ή ανικανότητας επίλυσης, να μη δοθεί κατευθείαν η λύση από τον εκπαιδευτικό αλλά κάποιες βοήθειες έτσι ώστε να καταφέρει ο μαθητής να φτάσει στο απαιτούμενο αποτέλεσμα μόνος του.
Άσκηση 4.3	Αυτή η άσκηση μπορεί να είναι δύσκολη για παιδιά με κενά στις μαθηματικές γνώσεις. Σε τέτοια περίπτωση, χρειάζεται καλή υποστήριξη από τον εκπαιδευτικό.
Δραστηριότητα 5.2	Συστήνεται η ομαδική εργασία σε αυτήν τη δραστηριότητα, η πολύ καλή ανάλυση όπως και η στήριξη στη γλώσσα και υπενθύμιση για τις απαιτούμενες γνώσεις.
Άσκηση 5.1	Προτείνεται να γίνει αυτή η άσκηση ως ομαδική εργασία.

● Στην ενότητα *Ανίσωση 1ου βαθμού με έναν άγνωστο*,

Άσκηση 1.3	Όπως ο στόχος αυτής της άσκησης είναι η σημασία του σύμβολου της ανισότητας, να βοηθηθούν οι μαθητές στην υλοποίηση των πράξεων στα 2 μέλη αν δυσκολευτούν.
Άσκηση 3.1	Ως συνέχεια γι' αυτήν την άσκηση, μπορεί ο εκπαιδευτικός να δώσει τη λεκτική σημασία μιας ανίσωσης και να ζητήσει από τους μαθητές να γράψουν την αντίστοιχη ανίσωση.
Άσκηση 4.1	Σ' αυτήν την άσκηση, είναι σημαντική η κάθε προσπάθεια του μαθητή, και σε περίπτωση

	δυσκολίας ή ανικανότητας επίλυσης, να μη δοθεί κατευθείαν η λύση από τον εκπαιδευτικό αλλά κάποιες βοήθειες έτσι ώστε να καταφέρει ο μαθητής να φτάσει στο απαιτούμενο αποτέλεσμα μόνος του.
Δραστηριότητα 5.2, πρόβλημα 1	Χρειάζεται καλή ανάλυση στην τάξη ως ομαδική εργασία.
Δραστηριότητα 5.2, πρόβλημα 2 & πρόβλημα 3	Να γίνονται ως ομαδική εργασία.

Οδηγίες για την τροχιά «Χώρος και Γεωμετρία»

Το διδακτικό υλικό που αφορά στη γεωμετρία και τους μετασχηματισμούς στο επίπεδο (συμμετρία και αναλογίες και ομοιότητα), δημιουργήθηκε σύμφωνα με τις παρακάτω **επτά αρχές**.

Αρχή 1η*: *Η απτή κατασκευή

Η γεωμετρία είναι το μάθημα εκείνο που βρίσκεται πιο κοντά στην εποπτεία μας στη χωρική αντίληψη και τη διαίσθηση. Παρ' όλα αυτά κάποιοι μαθητές αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία με αυτή. Ένας από τους λόγους είναι ότι απαιτούνται κατασκευές με τη χρήση και άλλων εργαλείων εκτός από το χαρτί και το μολύβι. Είναι αναγκαίο ο μαθητής να μετρήσει με το χάρακα και το μοιρογνωμόνιο, να σχεδιάσει κύκλους με το διαβήτη, να χαράξει κάθετες με το γνώμονα κ.λπ. Για κάποιους άλλους πάλι αυτό μπορεί να είναι πλεονέκτημα. Η εμπλοκή του σώματος και της κατασκευής με το χέρι μπορεί να έχει μεγαλύτερη χαρά και ενδιαφέρον. Ειδικά για παιδιά που έχουν και μεγαλύτερη εξοικείωση με τον φυσικό χώρο, τη γη, τον αυτοσχεδιασμό, τις κατασκευές. Οι μαθητές θα πρέπει να ενθαρρύνονται να κάνουν γεωμετρικές κατασκευές και να τους δίνεται ο απαραίτητος χρόνος. Το κεντρικό ζητούμενο είναι να κερδηθεί η χαρά και η εμπλοκή με την κατασκευή η οποία εμπεριέχει σε πολλές περιπτώσεις τη γνώση που θέλουμε να μεταδώσουμε με τη θεωρία. Όταν ένας μαθητής για παράδειγμα σχεδιάζει έναν κύκλο με τον διαβήτη γνωρίζει, καταλαβαίνει και νιώθει, ακόμα κι αν δεν μπορεί να το εκφράσει σωστά, ότι γυρνάει γύρω από ένα σημείο και έχει μία σταθερή απόσταση από αυτό. Σε μαθητές που ακόμα δεν γνωρίζουν καλά την ελληνική γλώσσα αυτό είναι ένα πλεονέκτημα του μαθήματος. Η ίδια η κατασκευή ενός τριγώνου με δοσμένες πλευρές, με κανόνα και διαβήτη, φανερώνει και εξηγεί την τριγωνική ανισότητα. Αυτό είναι και το νόημα πολλών δραστηριοτήτων μέσα στο υλικό όπου ο μαθητής «αφήνεται» να δοκιμάσει, να πειραματιστεί και να βρει την απάντηση μέσα από τις κατασκευές του.

Οι μαθητές σε προσφυγικές δομές ή ακόμα και σε τυπικές τάξεις που δεν έχουν μία ομαλή ζωή στο σπίτι είναι πιθανόν να μην έχουν τα απαραίτητα εργαλεία για τη γεωμετρία, όπως διαβήτη και γνώμονα. Ή ακόμα κι αν έχουν, μπορεί να τα χάσουν. Αυτό όμως δεν πρέπει να αφήσει ο εκπαιδευτικός να αποτελέσει πρόβλημα. Προτείνουμε λοιπόν εναλλακτικές λύσεις ή κατασκευές που μπορούν να κάνουν μόνοι τους οι μαθητές. Για παράδειγμα μέσα στο υλικό περιγράφονται με εικόνες τα βήματα για την κατασκευή ενός ορθογωνίου τριγώνου με ένα κομμάτι χαρτί. Μία λύση σε περίπτωση που δεν υπάρχει διαβήτης είναι ένα μικρό κομμάτι σπάγκου. Ένας κύκλος μπορεί να γίνει με ένα κομμάτι από σπάγκο δεμένο στο μολύβι, όπου ο μαθητής θα το «πατάει» στο άλλο άκρο κρατώντας τη σταθερή απόσταση που θέλει. Ένας χάρακας μπορεί να γίνει από ένα κομμάτι ξύλο. Η κατασκευή δε εργαλείων από τον ίδιο τον μαθητή θα προσδώσει σε αυτά μεγαλύτερη αξία για τον ίδιο και ενδεχομένως έτσι, να γίνει και πιο υπεύθυνος για τη φύλαξή τους.

Αρχή 2η: η Δραστηριότητα

Η αρχή αυτή περικλείεται στη φράση: «ό,τι μπορεί να συμπεράνει μόνος του ο μαθητής μέσα από τις κατασκευές του ή ένα σχήμα, δεν χρειάζεται να του το πούμε». Γι’ αυτό και υπάρχουν πολλές δραστηριότητες όπου ο μαθητής κατευθύνεται μέσα από την **δική του εμπειρία** στο συμπέρασμα στο οποίο θέλαμε να τον οδηγήσουμε. Είναι ήδη για πολλά παιδιά βαρετό και χωρίς νόημα να ακούνε τον δάσκαλο να τους υπαγορεύει μία θεωρητική γνώση, πόσο μάλλον για παιδιά που δεν ξέρουν καλά την ελληνική γλώσσα και γενικότερα βρίσκονται σε μία προσπάθεια ένταξης στην τυπική διαδικασία μάθησης. Το ζητούμενο επομένως είναι να τους δημιουργήσουμε ερωτήματα που θα θέλουν να βρουν την απάντηση και να τους δώσουμε προβλήματα που θα θέλουν να λύσουν.

Αρχή 3η : η σύνδεση με την Τέχνη

Η καλύτερη παιδαγωγική μέθοδος είναι η δημιουργία ισχυρών κινήτρων για μάθηση. Αυτό είναι βασικό για όλα τα παιδιά και τους ενήλικες. Όμως σε παιδιά με προσφυγική εμπειρία και πολλά προβλήματα το ισχυρότερο κίνητρο είναι η χαρά. Προτείνεται επομένως η ενθάρρυνση των μαθητών μέσα από τη γεωμετρία να κάνουν τα δικά τους μικρά έργα τέχνης. Για μικρότερα παιδιά στην ενότητα «συμμετρία» δίνεται μία ευκαιρία που δεν πρέπει να πάει χαμένη. Για μεγαλύτερη παιδιά, κατάλληλη ενότητα είναι οι «αναλογίες και ομοιότητα» η οποία εμπεριέχει την ομοιοθεσία. Στο υλικό προτείνονται δύο δραστηριότητες που σχετίζονται με αυτή και τα έργα δύο σπουδαίων καλλιτεχνών. Παιδιά που προέρχονται από μουσουλμανικές χώρες ενδεχομένως να μας εκπλήξουν με τις ικανότητές τους και την γεωμετρική τους αντίληψη. Καθώς οι εικόνες τους συνδέονται με την αραβική τέχνη η οποία είναι γεωμετρικά μοτίβα και περίτεχνα συμμετρικά σχήματα.

Αρχή 4η: η εργαλειακή αξιοποίηση του χρώματος και της εικόνας

Σε συνέχεια της προηγούμενης αρχής που έχει να κάνει με την τέχνη, γίνεται φανερό ότι η χρήση χρωμάτων είναι μία σημαντική παράμετρος. Όμως τα χρώματα στη γεωμετρία μπορούν να βοηθήσουν σημαντικά και στην «ανάγνωση» σύνθετων σχημάτων. Τα σύνθετα σχήματα προκαλούν παρανοήσεις στην οπτική αντίληψη που σχετίζονται με τη εγγύτητα, τον εγκλεισμό και τη συνέχεια (γωνίες η μία μέσα στην άλλη, γραμμές που τέμνονται κ.λπ.). Τα χρώματα φαίνεται ότι βοηθούν στην υπερπήδηση αυτής δυσκολίας (Gal & Linchevski, 2010). Θα μπορούσε ο εκπαιδευτικός της τάξης να έχει ένα κουτί με ξυλομπογιές που οι μαθητές θα μοιράζονται στην ώρα της γεωμετρίας.

Αρχή 5η : η ομαδική δραστηριότητα

Στο υλικό υπάρχουν αρκετές δραστηριότητες που χαρακτηρίζονται ως ομαδικές. Η αλληλεπίδραση και η συνεργασία με άλλα άτομα για την επίτευξη ενός κοινού στόχου δημιουργεί ευκαιρίες μάθησης, ικανοποίησης και εν τέλει χαράς. Η χαρά είναι μεγαλύτερη αν οι δραστηριότητες αυτές μπορούν να γίνουν σε εξωτερικό χώρο. Η ομοιότητα και η μέτρηση των σκιών ή η δραστηριότητα με το καθρεφτάκι είναι μία καλή ευκαιρία εξωτερικής, ομαδικής δραστηριότητες που προτείνουμε να υλοποιήσει ο εκπαιδευτικός. Οι δραστηριότητες αυτές απαιτούν χρόνο αλλά είναι ένας χρόνος κερδισμένος από άποψη στόχων που δεν είναι στενά γνωστικοί.

Αρχή 6η: η Αφήγηση και ο Διάλογος

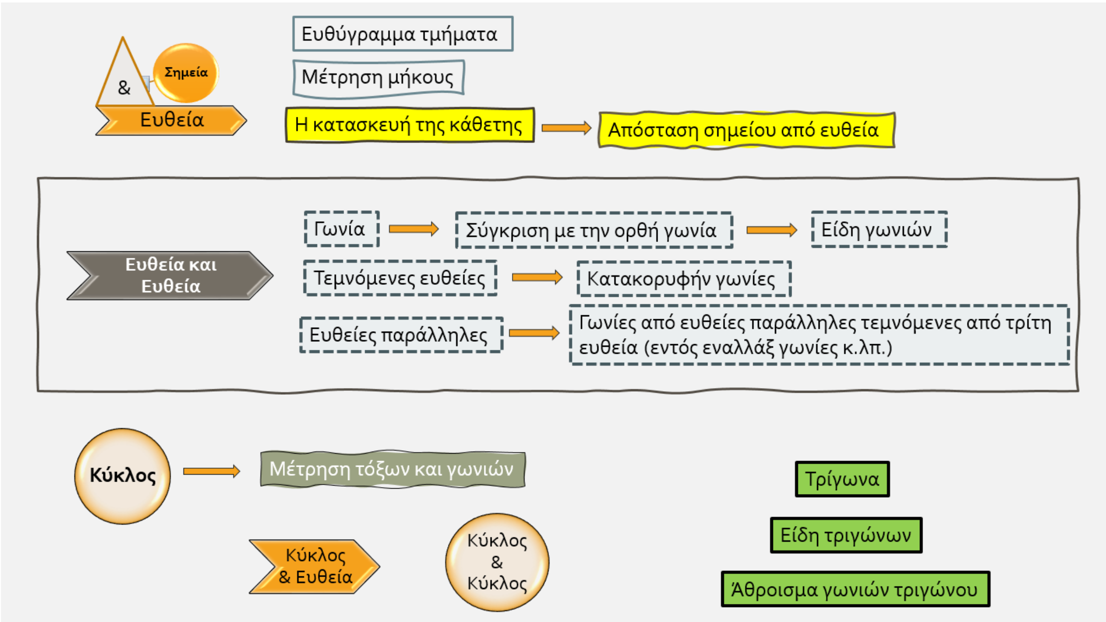
Συχνά στο κείμενο υπάρχει αφήγηση και παιχνίδι ρόλων. Οι πρωταγωνιστές είναι παιδιά, όπως οι μαθητές στους οποίους απευθύνεται. Η οικειότητα και η ταύτιση με τους πρωταγωνιστές ελπίζουμε να λειτουργήσει ευνοϊκά στην επίτευξη των γνωστικών στόχων. Οι διάλογοι έχουν διττό στόχο. Να αναδείξουν γνωστές παρανοήσεις των μαθητών και να προκαλέσουν προβληματισμό και διάλογο είτε ανάμεσα στους μαθητές είτε ανάμεσα στον δάσκαλο και τους μαθητές. Σε έναν διάλογο οι μαθητές μπορούν να εκφράσουν αυτό που σκέφτονται και αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό για τη διαδικασία της γνωστικής ανάπτυξης. Επιπλέον όμως στην περίπτωση παιδιών που δεν γνωρίζουν καλά τη γλώσσα, εξυπηρετεί και τον πρωταρχικό στόχο που είναι η εκμάθηση της ελληνικής γλώσσας.

Αρχή 7η: Σύνδεση με τη φυσική και πολιτισμική δραστηριότητα

Αρκετές δραστηριότητες παραπέμπουν σε δραστηριότητες με φυσικά αντικείμενα. Η σύνδεση με την πραγματικότητα έχει τη δική της σημασία για την ενίσχυση της κατανόησης, της μνήμης και της πειθούς. Ειδικά στην περίπτωση της γεωμετρίας, οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο γνώσης μόνο στη βάση της τριβής με πραγματικά σχήματα μπορούν να έχουν οποιαδήποτε γνωστική ή μαθηματική σχέση με τις ιδεατές τους φόρμες. Τα πρωταρχικά αντικείμενα της γεωμετρίας το σημείο, η ευθεία, ο κύκλος, το τρίγωνο είναι ιδεατά αντικείμενα της σκέψης μας. Παρ' όλα αυτά, ο ιδανικός ορισμός τους πηγάζει από την αφηρημένη απεικόνιση της χωρικής πραγματικότητας. Στο υλικό επιχειρείται τόσο η εμπειρική και διαισθητική τους πρώτη προσέγγιση όσο και ο τελικός τους ορισμός ως αντικείμενα της γεωμετρίας. Ο ορισμοί παρ' όλη την συνειδητή απουσία αυστηρότητας είναι ευκλείδειοι. Έτσι το είδος της γωνίας ορίζεται ανεξάρτητα από τη μέτρηση της σε μοίρες. Ως αρχή προσδιορισμού κάθε γωνίας είναι η ορθή γωνία. Ο ορισμός της ορθής αλλά και της καθετότητας είναι η περίπτωση όπου όλες οι γωνίες που σχηματίζονται από δύο τεμνόμενες ευθείες, είναι ίσες. Η σύγκριση της *Πύλης των Λεόντων* με τις πύλες της πόλης Χαττούσα στη δραστηριότητα Γ1.5, η σύνδεση του θεωρήματος του Θαλή με τον μύθο και τις σκιές των πυραμίδων, ο πίνακας από τον μεσαίωνα στον οποίο απουσιάζει η αναλογικότητα κ.λπ είναι μερικές προσπάθειες σύνδεσης της γεωμετρίας με τον ανθρώπινη πολιτισμική δραστηριότητα στον αντίστοιχο χρόνο και τόπο.

Βασικές γεωμετρικές έννοιες

Οι βασικές γεωμετρικές έννοιες ξεδιπλώνονται στο κεφάλαιο ως σχέσεις μεταξύ **τριών στοιχείων: το σημείο, η ευθεία και ο κύκλος.** Για παράδειγμα η σχέση σημείου και ευθείας μας οδηγεί στην απόσταση σημείου από ευθεία και στην κατασκευή της κάθετης. Οι σχέσεις δύο ευθειών δημιουργούν γωνίες ή παράλληλες ευθείες κ.ο.κ.



Αρχικές έννοιες - Ορολογία – γεωμετρική γλώσσα:

Για την ομαλή ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού απαιτείται μία αρχική γνώση της ειδικής γλώσσας και αναπαράστασης που χρησιμοποιούμε. Άρα ένας βασικός στόχος που διατρέχει όλη την ενότητα είναι οι μαθητές να μάθουν πώς αναπαριστούμε τα γεωμετρικά αντικείμενα ευθύγραμμο τμήμα, ευθεία, ημιευθεία, γωνία, κύκλο, τρίγωνο κ.λπ. στη γλώσσα. Η γνώση αυτή είναι διπλής κατεύθυνσης. Να μπορούν οι ίδιοι να εκφράσουν με τη σωστή ορολογία τα αντικείμενα που βλέπουν σε ένα σχήμα αλλά και αντίστροφα, να αναγνωρίζουν σωστά σε ένα σχήμα το γεωμετρικό αντικείμενο που αναγράφεται σε ένα κείμενο. Η ονοματολογία και η ορολογία της γεωμετρίας μπερδεύει γενικά τους μαθητές, πόσο μάλλον όταν αυτοί δεν είναι εξοικειωμένοι με την ελληνική γλώσσα και το ελληνικό αλφάβητο. Όπως για παράδειγμα η αναγνώριση των γωνιών και η σωστή τους ονομασία με τρία γράμματα. Η δυσκολία αυτή αυξάνεται σε σύνθετα σχήματα. Προτείνεται επομένως η ενθάρρυνση των μαθητών να χρησιμοποιούν τα χρώματα για να διακρίνουν γωνίες ή άλλα στοιχεία πάνω στο σχήμα και αυτό είναι και το νόημα των ασκήσεων Α2.1, Α2.2.

Μία άλλη δυσκολία που αντιμετωπίζει κάποιος που δεν είναι εξοικειωμένος με τα γεωμετρικά αντικείμενα είναι ότι δεν «βλέπει» όλα τα στοιχεία πάνω σε ένα σχήμα. Η δραστηριότητα Α1.3 στοχεύει σε αυτήν την αρχική ευαισθητοποίηση και διάκριση της έννοιας συνευθειακά και μη- συνευθειακά σημεία. Δύο σημεία είναι συνευθειακά ενώ τρία, όχι πάντα. Τρία σημεία ορίζουν πάντα τρία τμήματα ενώ τρία σημεία δεν ορίζουν πάντα τρεις ευθείες. Στην περίπτωση που τα σημεία είναι περισσότερα (π.χ. 4) τότε η διάκριση όλων των δυνατών περιπτώσεων τοποθέτησής τους στο επίπεδο έχει μία πρόσθετη εκπαιδευτική αξία καθώς αναπτύσσει τη συνδυαστική σκέψη.

Η γωνία: Για την παρουσίαση της έννοιας της γωνίας επιλέξαμε την αρχική διαισθητική προσέγγιση μιας σταθερής ημιευθείας και της στροφής μίας δεύτερης γύρω από το κοινή τους αρχή. Κατά τη στροφή «χρωματίζουμε», «σκουπίζουμε» και εν τέλει περικλείουμε όλα τα σημεία του επιπέδου που ορίζουν οι δύο ημευθείες μαζί με τις ίδιες τις ημιευθείες. Με αυτή την προσέγγιση θεωρήσαμε ότι «κερδίζουμε» περισσότερα στην κατανόηση της έννοιας γωνία, έχοντας επίγνωση του κινδύνου ότι οι μαθητές δεν «βλέπουν» ή αγνοούν την ύπαρξη πάντα της δεύτερης μη-κυρτής γωνίας. Γι' αυτό η ύπαρξή της αλλά και ο τρόπος με τον οποίο αναφερόμαστε σε αυτή σχολιάζεται ιδιαιτέρως. Ένα άλλο λεπτό σημείο στο οποίο θα πρέπει να δώσει έμφαση ο εκπαιδευτικός είναι στην αναγνώριση από τους μαθητές ποια σημεία ανήκουν και ποια όχι σε μία δοσμένη γωνία.

Η έννοια της ορθής γωνίας και της καθετότητας είναι από τις πιο θεμελιώδης πρωταρχικές έννοιες. Η ισότητα των 4 γωνιών που δημιουργούνται, όταν τέμνονται δύο ευθείες ορίζει την ορθότητα και τη καθετότητα. Η σύγκριση κάθε γωνίας με την ορθή καθορίζει και το είδος της.

Σε αυτή την ενότητα το **βάρος πρέπει να δοθεί στην κατασκευή της καθέτου και στην απόσταση ενός σημείου** από μία ευθεία. Η απόσταση σημείου από ευθεία είναι κομβικής σημασίας καθώς πολλές άλλες έννοιες στη συνέχεια εξαρτώνται από αυτήν. Πολλά παιδιά δυσκολεύονται στην κατασκευή της κάθετης σε μια ευθεία όταν η ευθεία αυτή **δεν** είναι οριζόντια. Το νόημα της δραστηριότητας Α3.2 (με την απόσταση από τον αγωγό) είναι να δημιουργήσει την εξοικείωση με την κατασκευή κάθετης σε μη-οριζόντια ευθεία καθώς και με την έννοια της απόστασης σημείου από ευθεία. Θα πρέπει **να δοθεί χρόνος** σε αυτή δραστηριότητα η οποία μπορεί να γίνει και ομαδικά. Θα προκύψουν προφανώς διαφωνίες στα αποτελέσματα και αυτό είναι ακριβώς το ζητούμενο. Μέσα από τις διαφορές που θα προκύψουν να αναδειχθεί το θέμα της ορθής κατασκευής αλλά και τα ενδεχόμενα σφάλματα των μετρήσεων.

Ο κύκλος: Ο κύκλος προσθέτει και νέα ορολογία με την οποία θα πρέπει να εξοικειωθεί ο μαθητής. Το σημαντικό στοιχείο το οποίο προσπαθούν να αναδείξουν και οι δραστηριότητες στη συνέχεια είναι ότι, είτε θέλουμε να κινηθούμε κρατώντας σταθερή απόσταση ρ από ένα σημείο Ο, είτε να κινηθούμε κρατώντας σταθερά απόσταση > ρ από το σημείο Ο, είτε να κινηθούμε σε απόσταση < ρ από το σημείο Ο, το ζητούμενο σχήμα μας είναι σε κάθε περίπτωση ο κύκλος (Ο,ρ). Οι μαθητές είναι σημαντικό να συνδέσουν τον κύκλο **με την σταθερή απόστασή μας γύρω από ένα σημείο.** Το άλλο κρίσιμο σημείο στην ενότητα κύκλος είναι η **άρρηκτη σχέση ενός τόξου με την επίκεντρη γωνία του** και το γεγονός ότι παρ’ ότι δύο γωνίες που έχουν ίσα μέτρα είναι πάντα ίσες, δεν συμβαίνει το ίδιο και με τα τόξα που έχουν τα ίδια μέτρα. Κι αυτό γιατί το μέτρο ενός τόξου μας δείχνει τι μέρος (κλάσμα) του κύκλου στον οποίο βρίσκεται, είναι. Επομένως η σύγκριση τόξων που βρίσκονται σε άνισους κύκλους δεν έχει νόημα και αυτό αναδεικνύει η δραστηριότητα Α6.2

Ευθείες τεμνόμενες και ευθείες παράλληλες: Όταν δύο ευθείες τέμνονται δημιουργούνται 4 γωνίες που ανά δύο είναι κατακορυφήν. Σύμφωνα με τη $2^η$ βασική μας αρχή και παρ’ ότι σε αυτήν ηλικία δεν έχει αναπτύξει ένας μαθητής αφηρημένη και συνθετική σκέψη, συνιστάται η παρότρυνσή του στο να κάνει παρατηρήσεις και να βγάζει κάποια συμπεράσματα. Στην άσκηση Α7.1 προσπαθούμε να οδηγήσουμε τον μαθητή, μέσα από τις γνώσεις που έχει αποκτήσει π.χ. ξέρει να βρίσκει παραπληρωματικές γωνίες, να βγάλει την ισότητα των κατακορυφήν γωνιών. Παρ' ότι το σχήμα μας είναι μία μόνο περίπτωση, αυτό που προτείνεται στον εκπαιδευτικό είναι να κάνει κι άλλα παρόμοια παραδείγματα και να οδηγήσει στη γενίκευση. Στην παράγραφο με τις παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη, οι μαθητές θα πρέπει να εξοικειωθούν πρώτα καλά με τους όρους γωνίες εντός, εκτός, εναλλάξ και επί τ' αυτά. Στη συνέχεια ο στόχος της δραστηριότητας Α7.1 είναι, αφού τους πούμε ότι οι εντός κι εναλλάξ γωνίες είναι ίσες να βγάλουν μόνοι τους το συμπέρασμα για την ισότητα των εντός-εκτός κι επί τ' αυτά. Η δραστηριότητα Α7.2 με τη βοήθεια χρώματος έχει ως στόχο τη συνολική θεώρηση των ίσων γωνιών στο σχήμα.

Στη δραστηριότητα Α7.3 αφήνουμε τους μαθητές να διατυπώσουν τις εντυπώσεις τους και να δώσουν μία λύση. Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός θα συνδέσει το πρόβλημα την απόσταση σημείου από ευθεία. Είναι σημαντικό η έννοια της παραλληλίας να συνδεθεί με την σταθερή απόσταση των δύο ευθειών. Όπως και με τον κύκλο να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι το σχήμα που προσδιορίζει τη **σταθερή απόστασή μας από μία ευθεία είναι μία άλλη παράλληλη ευθεία σε αυτή** (δραστηριότητα Α7.5, Α7.6).

Στην ενότητα ευθεία και κύκλος τα συμπεράσματα προτείνεται να βγουν από τους ίδιους μαθητές. **Η έννοια κλειδί που επανέρχεται συνεχώς είναι η απόσταση σημείου από ευθεία.**

Η παράγραφος Α.9 διερευνά τη σχέση δύο κύκλων. Οι μαθητές θα κάνουν τις κατασκευές που προτείνονται και ο ρόλος του εκπαιδευτικού θα είναι να τους βοηθήσει να εκφράσουν με μαθηματικό τρόπο αυτά που βλέπουν.

Τρίγωνα: ***οι βασικοί στόχοι αυτής της παραγράφου είναι:***

- *Η τριγωνική ανισότητα ως προϋπόθεση ύπαρξης τριγώνου με μήκος πλευρών τρεις δοσμένους αριθμούς. Προτείνεται ο εκπαιδευτικός να θέσει στους μαθητές την άσκηση: «Μπορείτε να φτιάξετε τρίγωνο με πλευρές: α) 7,4,2; γ) 7, 4,3 και γ) 7,4,5;» Οι μαθητές προτείνεται να αφεθούν ελεύθεροι να το κατασκευάσουν με όποιο τρόπο νομίζουν(χάρακα ή διαβήτη). Πολλοί μαθητές θα πουν ότι μπόρεσαν να κατασκευάσουν το τρίγωνο 7,4,3. Αυτό θα είναι άλλη μία αφορμή* *για συζήτηση σχετικά με τις μετρήσεις, τη γεωμετρική κατασκευή με το διαβήτη και την ιδεατότητα των σχημάτων στη γεωμετρία.*

- Οι κατασκευές τριγώνων με κανόνα και διαβήτη.
- Η διερεύνηση στα είδη των τριγώνων και τους συνδυασμούς αυτών. Η δραστηριότητα Α.10.3 απαιτεί χρόνο ο οποίος πρέπει να δοθεί ώστε οι μαθητές και πάλι να καταλήξουν μόνοι τους στο συμπέρασμα π.χ. ότι δεν υπάρχει ισόπλευρο που είναι ορθογώνιο. Όπως προαναφέραμε, η ουσιαστική γεωμετρική γνώση βρίσκεται στην κατασκευή.

Οδηγίες για την τροχιά «Μετασχηματισμοί στο επίπεδο»

Συμμετρία

Η συμμετρία είναι στενά συνδεδεμένη με μία έμφυτη στον άνθρωπο αντίληψη του μορφώματος και συναντάται συχνά στη φύση τόσο στο ζωικό όσο και στο φυτικό βασίλειο. Στην καθημερινή γλώσσα φανερώνει την ομορφιά, την κανονικότητα της μορφής, την αρμονική διάταξη ή την περιοδική επανάληψη συγκεκριμένων χαρακτηριστικών. Η ομορφιά είναι κινητήριος δύναμη και για τους μαθηματικούς. Είναι μία σύγχρονη γεωμετρική έννοια για την οποία χρειάστηκαν περίπου 2,5 χιλιετίες ώστε οι μαθηματικοί να μπορούν να τη χρησιμοποιούν και όχι απλώς να την ατενίζουν με θαυμασμό.

Ο μαθηματικός ορισμός της είναι ότι συμμετρία είναι ένας μετασχηματισμός που αφήνει το σχήμα αναλλοίωτο. Έχουμε δηλαδή μία συνάρτηση σ η οποία αντιστοιχεί στο αρχικό σχήμα α το συμμετρικό του σ(α). Δηλαδή $\alpha \xrightarrow{\sigma} \sigma(\alpha)$= α'

Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται τα δύο βασικά είδη μετασχηματισμών, αξονική και κεντρική συμμετρία κάνοντας και μία απλή αναφορά στη μεταφορά και τη στροφή. Στην εισαγωγή της αξονικής συμμετρίας διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Α) Η περίπτωση που έχουμε ένα αρχικό σχήμα α και το συμμετρικό του ως προς μία ευθεία είναι ένα άλλο σχήμα σ(α) =α' ίσο με το αρχικό αλλά ανεστραμμένο.

Β) Η περίπτωση που το είδωλο του αρχικού σχήματος ως προς μία ευθεία είναι το ίδιο το σχήμα, δηλαδή σ(α) =α , η συνάρτηση δηλαδή είναι ταυτοτική. Η περίπτωση αυτή είναι όταν αναγνωρίζουμε ότι το ίδιο το σχήμα μπορεί να χωριστεί σε δύο ίδια μέρη από μία ευθεία ή όπως λέμε έχει άξονα συμμετρίας.

Η έννοια της συμμετρίας ξεδιπλώνεται σιγά, σιγά έχοντας με αρχή το συμμετρικό ενός σημείου. Στην πρώτη δραστηριότητα αυτού του κεφαλαίου (δραστηριότητα Β1.2)οι μαθητές βλέπουν την απεικόνιση ενός σημείου ως προς μία ευθεία με τη δίπλωση του χαρτιού ως προς αυτή. Ο στόχος αυτής δραστηριότητας είναι να ερμηνεύσουν μαθηματικά τι σημαίνει «διπλώνω το χαρτί και το Α «πέφτει» πάνω στο Α';». Θέλουμε να καταλήξουν ότι:

- Αφού το ΟΑ=ΟΑ' , το Ο είναι το μέσο του Α'Α.
- Αφού οι δύο γωνίες $\widehat{\Gamma O A}$ *και* $\widehat{\Gamma O B}$ είναι ίσες (ταύτιση των πλευρών) και παραπληρωματικές, τότε είναι ορθές.

Οι γωνίες στη βάση ισοσκελούς και η έννοια της μεσοκαθέτου

Ο άξονας συμμετρίας δύο σημείων Α και Α' εγγράφεται στη σκέψη ως μία ευθεία **κάθετη στο μέσον** και αυτό μας στρώνει το έδαφος για την έννοια της μεσοκάθετης που ακολουθεί. Έτσι οι μαθητές (χωρίς να τους το πούμε εμείς) καταλαβαίνουν ότι για να βρουν το είδωλο ενός σημείου Α ως προς μία ευθεία (άξονας) πρέπει να φέρουν αρχικά την κάθετο σε αυτή την ευθεία και ύστερα να φροντίσουν τα Α, Α' να ισαπέχουν από τον άξονα.

Είναι πολύ εύκολο πλέον ο μαθητής να δει ότι αν πάρει ένα σημείο Β κ.λπ. πάνω στη μεσοκάθετο του ΑΑ' τα τμήματα ΒΑ και ΒΑ' θα είναι ίσα. Αφού αν διπλώσουμε το χαρτί τα Α και Α' εξακολουθούν να ταυτίζονται, το Β είναι κοινό άκρο και άρα τα τμήματα είναι ίσα, αφού ταυτίζονται τα άκρα τους.

Το Β είναι ένα **οποιοδήποτε** σημείο άρα το ίδιο θα συμβαίνει και με κάθε σημείο πάνω στη μεσοκάθετο. Επομένως οι μαθητές καταλήγουν στην **βασική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου**. Η εξήγηση προκύπτει ομαλά μέσα από τη συμμετρία χωρίς τη χρήση μετρήσεων οι οποίες είναι ανεπαρκείς και αβέβαιες, κάτι που προσπαθήσαμε να αναδείξουμε και στο 1ο κεφάλαιο.

Μέσα από αυτό οι μαθητές θέλουμε να καταλήξουν σε ακόμη δυο βασικά συμπεράσματα:

- Το τρίγωνο ΒΑΑ' είναι ισοσκελές
- Η μεσοκάθετος της βάσης ενός ισοσκελούς είναι άξονας συμμετρίας του και αυτό σημαίνει ότι:
    - Είναι και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής
    - Οι γωνίες στη βάση του ισοσκελούς είναι ίσες

Από το συμμετρικό **ενός σημείου,** προχωράμε στο συμμετρικό **ενός ευθυγράμμου τμήματος** δείχνοντας ότι αυτό προκύπτει ένα βρούμε τα συμμετρικά από τα άκρα του. Και τελικά το συμμετρικό κάθε ευθυγράμμου σχήματος προκύπτει με την κατασκευή των συμμετρικών των κορυφών του.

Η κεντρική συμμετρία είναι ένας μετασχηματισμός όπου το συμμετρικό ενός αρχικού σχήματος είναι ένα ίσο σχήμα με το αρχικό που έχει «στρίψει» γύρω από ένα σημείο κατά 180^o. Όπως και στην αξονική εάν το συμμετρικό του αρχικού σχήματος είναι ο εαυτός του, τότε λέμε ότι το σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας. Η συμμετρία και σε αυτή την περίπτωση ξεδιπλώνεται με τη συμμετρία ενός σημείου γύρω από ένα άλλο και προχωρά προοδευτικά στο συμμετρικό ενός τμήματος και μετά στο συμμετρικό ενός ευθυγράμμου τμήματος.

Τα παραλληλόγραμμα (παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος και τετράγωνο) δεν περιλαμβάνονται στο πλαίσιο σπουδών αυτού του υλικού καθώς οι διαθέσιμες διδακτικές ώρες του ταχύρρυθμου αυτού προγράμματος εκπαίδευσης δεν το επέτρεψαν. Αν όμως υπάρχει χρόνος και ανάλογα και με την τάξη και τις δυνατότητες έχει προβλεφθεί στο Β’ μέρος η ενότητα «συμμετρία σε γνωστά τετράπλευρα». Επειδή ούτε η ισότητα τριγώνων περιλαμβάνεται στο πρόγραμμα, τα τετράπλευρα «χτίζονται» μέσα από τη συμμετρία τους. Η συμμετρία εμπεριέχει την έννοια της ισότητας διαισθητικά, ως ταύτιση. Με αυτόν τον τρόπο εκτός του ότι αναδεικνύεται η κεντρική συμμετρία του παραλληλογράμμου που δεν είναι «ορατή στους μαθητές , προκύπτουν αβίαστα οι ιδιότητές του. Το ίδιο συμβαίνει και με το ορθογώνιο. Έτσι το παραλληλόγραμμο προκύπτει ως κατασκευή από τη συμμετρία ενός τυχαίου τριγώνου, ενώ του ορθογωνίου ως συμμετρία ενός ισοσκελούς τριγώνου. Αυτή η διδακτική επιλογή εξηγεί τις ιδιότητές του αλλά όχι τον ορισμό του φυσικά ως το τετράπλευρο που οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. Αυτό θα δοθεί ως ορισμός, στο τέλος. Αυτό όμως δεν θα μπορούσε να εξηγηθεί σε καμία περίπτωση στο γυμνάσιο αφού η γεωμετρία δεν παρουσιάζεται με τη συνθετική παραγωγική της δομή. Η παραλληλία επομένως δύο ευθειών δεν θεμελιώνεται με αναφορά στο 5^o αίτημα ή τα ισοδύναμα αυτού (δηλ. αν οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες τότε οι ευθείες είναι παράλληλες). Εξηγούμε επομένως τις ιδιότητες αλλά δεν θεσπίζουμε κριτήρια. Το νόημα είναι να αναγνωρίσουν οι μαθητές τις συμμετρίες που έχουν τα γνωστά αυτά τετράπλευρα και να συμπεράνουν τις ιδιότητες που απορρέουν. Όπως έχει προαναφερθεί η συμμετρία είναι άλλη μία ευκαιρία για την καλλιτεχνική έκφραση κάποιων μαθητών. Επομένως συνιστάται η παρότρυνση των μαθητών για τη δημιουργία των δικών του συμμετρικών σχεδίων. Οι μαθητές μπορούν ακόμα να φέρουν στο σχολείο και συμμετρικά μοτίβα , σχέδια που συναντούν σε πλακόστρωτα, σε ρούχα, σε εικόνες από το διαδίκτυο. Ακόμα μπορεί να αναζητήσει κανείς τη συμμετρία στα λουλούδια ή τα έντομα. Το υλικό αυτό δεν εξαντλεί ούτε την έννοια, ούτε τα παραδείγματα που είναι πάρα πολλά γύρω μας. Επιχειρεί όμως στο μικρό διαθέσιμο χρόνο να **εξηγήσει και να αξιοποιήσει γεωμετρικά** το γοητευτικό φαινόμενο της συμμετρίας.

Αναλογίες και Ομοιότητα

Η έννοια του λόγου και της αναλογίας συναντάται ως έννοια με διαφορετικές μεταφράσεις και ερμηνείες από το δημοτικό έως και την τελευταία τάξη του λυκείου. Είναι το πιο περίπλοκο από διδακτική σκοπιά, το πιο παρατεταμένο από πλευρά ανάπτυξης αλλά και το πιο προκλητικό από γνωστικής πλευράς. Στο κεφάλαιο αυτό, παρ' ότι εμφανίζεται η αλγεβρική του διαχείριση στην επίλυση κάποιων προβλημάτων, το κεντρικό ζητούμενο είναι η γεωμετρική ερμηνεία της έννοιας της αναλογίας, η εφαρμογή της σε διάφορα πλαίσια και η αναγνώριση αυτής στην ομοιότητα.

Στόχος 1^{ος}: Ο λόγος ως σχέση μεγεθών

Ο λόγος μας εκφράζει τη σχέση μεταξύ δύο μεγεθών που είναι ο δομικός λίθος της **μέτρησης.** Στην ενότητα αυτή τα μόνα μεγέθη που θα μας απασχολήσουν είναι τα μήκη ευθυγράμμων τμημάτων. Τη σχέση αυτή στη περίπτωση της ανισότητας θέλουμε να την περιγράψουμε ακριβώς. Αυτό έχουμε τη δυνατότητα να το κάνουμε με δύο τρόπους. Είτε προσθετικά (το α είναι μεγαλύτερο από το β κατά …) είτε πολλαπλασιαστικά (δηλαδή στην περίπτωση του ρητού λόγου- Το α είναι x φορές μεγαλύτερο από το β). Η σύγκριση μεταξύ του α και του β με προσθετική σχέση προϋποθέτει και δεσμεύεται από κάποια αντικειμενική μονάδα μέτρησης, μία μονάδα δηλαδή που «μετρά» και τα δύο. Η σύγκριση με το λόγο α/β δεν προϋποθέτει καμία εξωτερική μονάδα μέτρησης. Είναι η απόλυτη σχέση μεταξύ του α και β δηλαδή το ένα «μετρά» το άλλο χωρίς παρέμβαση τρίτου. Οι πρώτες σελίδες της ενότητας έχουν ως στόχο την εξοικείωση με την έννοια αλλά και την **γλωσσική έκφραση και ερμηνεία** της σχέσης π.χ. $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = 2$ ή $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{4}$. Ένα σημαντικό σημείο στο οποίο πρέπει να σταθεί ο εκπαιδευτικός είναι η παρανόηση που δημιουργείται με τις αναλογίες στη γεωμετρία. Δηλαδή στη σχέση $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{4}$πολλά παιδιά νομίζουν ότι δηλώνει ότι AB=3 και ΓΔ =4 . Στο υλικό δίνεται ένα αντιπαράδειγμα αλλά ο εκπαιδευτικός μπορεί με κάθε ευκαιρία να δίνει και άλλα τέτοια αντιπαραδείγματα.

Στόχος 2^{ος}: η αναγνώριση της αναλογίας των μεγεθών μιας εικόνας σε σχέση με τα πραγματικά μεγέθη που απεικονίζονται.

Η εφαρμογή των αναλογιών ξεκινά με δύο εικόνες με τις οποίες προσπαθούμε να εισάγουμε την έννοια της αναλογικότητας ανάμεσα στις απεικονίσεις της πραγματικότητας κι ενός σχεδίου. Η πρώτη εικόνα είναι μία τοιχογραφία του Giotto, ζωγράφου του μεσαίωνα, όπου στη ζωγραφική δεν υπήρχε ακόμα η έννοια της προοπτικής και εν τέλει της αναλογίας. Ο στόχος είναι να καταλάβουν και να δουν οι μαθητές το πόσο «στρεβλή» και μη αληθινή είναι μία απεικόνιση που δεν τηρούνται οι αναλογίες. Έτσι το ύψος ενός ανθρώπου είναι το ίδιο με αυτό ενός στάβλου και το μέγεθος από το πρόβατο είναι ίδιο με αυτό μιας γάτας! Στη δεύτερη εικόνα που είναι ένας πίνακας της Αναγέννησης υπάρχει ισορροπία. Αυτή η συζήτηση έχει πολλές δυνατότητας διαθεματικής ανάπτυξης. Συνδέει τη γεωμετρία και την επιστήμη και με άλλες περιοχές του προγράμματος σπουδών όπως ιστορία, τέχνη, γεωγραφία, κ.λπ. Στον εκπαιδευτικό δίνεται μία ευκαιρία που αν θέλει μπορεί να την αξιοποιήσει.

Ο εκπαιδευτικός μετά από αυτή τη συζήτηση με τις εικόνες και την αναλογική αναπαράσταση θα μπορούσε να ενισχύσει περαιτέρω την αίσθηση και τη σημασία της αναλογικότητας με την εξής δραστηριότητα:

Πρόσθετη δραστηριότητα: Ο εκπαιδευτικός ζητάει από τα παιδιά να φτιάξουν ένα πρόχειρο σκίτσο στο χαρτί από δύο αντικείμενα στο χώρο τους τα ύψη των οποίων τα γνωρίζουν ή μπορούν να τα βρουν. Οι μαθητές όταν θα προσπαθήσουν να τα σχεδιάσουν πάνω στο χαρτί τους θα αναγκαστούν να σκεφτούν τη σχέση μεταξύ των υψών τους στο χαρτί. Αυτό θα τα βοηθούσε να καταλάβουν τη σημασία της αναλογικότητας και θα προετοίμαζε πολύ καλά το έδαφος για τις επόμενες δραστηριότητες.

Οι επόμενες δραστηριότητες έρχονται ως αντίστροφη διαδικασία. Καθώς έχουμε θεμελιώσει τη διατήρηση της αναλογίας ανάμεσα στα μεγέθη στην εικόνα και τα πραγματικά μεγέθη, το ζητούμενο είναι η αξιοποίηση αυτής της αναλογίας για να αντλήσουμε την πληροφορία που θέλουμε για ένα πραγματικό μέγεθος. Αυτό μας οδηγεί ομαλά και στην έννοια της κλίμακας.

Στόχος 3ος: Το Θεώρημα του Θαλή και οι συνέπειές του

Η αναλογικότητα ήταν το πρώτο πράγμα που «είδε» ο άνθρωπος και αυτό εκφράζεται με το μύθο του Θαλή. Η ιστορία για τη μέτρηση του ύψους της πυραμίδας του Χέοπα από το Θαλή χάνεται στα βάθη και στη λήθη της ιστορίας.

Ο μύθος αυτός όμως σηματοδοτεί και μεταφέρει το επίτευγμα του ανθρώπου να καταφέρει να «μετρήσει» αυτό που «δεν έφταναν» τα πόδια του με αυτό που βρίσκονταν μπροστά στα πόδια του. Γι' αυτό και είναι σημαντικό να γίνει τουλάχιστον μία εξωτερική δραστηριότητα, όπου οι μαθητές θα «μετρήσουν» ένα ψηλό αντικείμενο. Η πρωταρχική ιδέα είναι αυτή της ομοιότητας την οποία ούτε ο Θαλής, ούτε κάποιος άλλος απέδειξε. Το έκανε ο Ευκλείδης πολλά χρόνια αργότερα ενσωματώνοντας αυτή τη γνώση στα *Στοιχεία του.* Ο τρόπος που παρουσιάζεται και αποδεικνύεται η πρόταση που στην Ελλάδα αποκαλούμε «Θεώρημα του Θαλή» έχει πια απομακρυνθεί από την πρωταρχική της ενάργεια. Οι λόγοι πάνω στις πλευρές ενός τριγώνου τίποτα δε σου θυμίζουν το μύθο με τις σκιές. Στην πρώτη παράγραφο αυτής της ενότητας, οι εικόνες που χρησιμοποιήσαμε έχουν σκοπό να αναδείξουν αυτή τη σύνδεση.

Κατά τα άλλα οι μαθητές σε αυτή την ενότητα θα πρέπει να μπορούν να εφαρμόσουν το Θεώρημα του Θαλή στις περιπτώσεις όπου εφαρμόζεται που σε αυτό υλικό είναι οι εξής δύο: η περίπτωση του τριγώνου με ένα τμήμα παράλληλο στη βάση του ή η περίπτωση της κλεψύδρας. Είτε το ένα, είτε το άλλο είναι το **πρωταρχικό σχήμα της ομοιότητας.**

Η επέκταση και η εφαρμογή του Θαλή είναι η ομοιοθεσία με άλλα λόγια η «μεγέθυνση» ή η «σμίκρυνση» ενός αντικειμένου. Το κεντρικό νόημα και ο βασικός στόχος σε αυτή την παράγραφο είναι να καταλάβουν οι μαθητές ότι αν θέλουμε να μεγαλώσουμε κάτι ή να το μικρύνουμε διατηρώντας τις αναλογίες του, τότε ο τρόπος είναι η ομοιοθεσία που βασικά είναι και ο τρόπος που βλέπουμε.

Και σε αυτή την ενότητα δίνεται η ευκαιρία για τη δημιουργία ενός καλλιτεχνικού έργου με θέμα την ομοιοθεσία, αντλώντας έμπνευση από δύο σπουδαίους καλλιτέχνες τον V. Vasarely και τον M. C. Escher.

Στόχος 4ος: Η ομοιότητα

Ο ομοιότητα εισάγεται ως ένας μετασχηματισμός όπως και η συμμετρία που όμως **δεν** αφήνει το αρχικό σχήμα αναλλοίωτο. Αναλλοίωτη μένει η μορφή και αλλάζει το μέγεθος. Η αναλλοίωτη μορφή στα ευθύγραμμα σχήματα οφείλεται στο αναλλοίωτο των γωνιών και των λόγων των πλευρών. Η ομοιότητα και καθώς και τα κριτήρια ομοιότητας δεν μπορούν σε αυτό το επίπεδο να παρουσιαστούν παραγωγικά. Παρουσιάζονται ως επακόλουθο του Θ. Θαλή. Δηλαδή δείχνουμε (εν μέρει διαισθητικά) ότι τελικά δύο οποιαδήποτε τρίγωνα που είναι όμοια, μπορούμε να τα τοποθετήσουμε έτσι ώστε να μας δώσουν το πρωταρχικό σχήμα με το τρίγωνο και την παράλληλη στη βάση του. Στην περίπτωση του Θαλή έχουμε ισότητα δύο λόγων. Στην περίπτωση της ομοιότητας έχουμε ισότητα τριών λόγων. Το στερεοτυπικό λάθος που εμφανίζεται εδώ έχει παρουσιαστεί μέσα από το λάθος της Νάντια στη δραστηριότητα 3.1. (όπου είχε γίνει επέκταση του Θαλή και στον λόγο της τρίτης πλευράς).

Η περίπτωση που τα τρίγωνα είναι περιεστρεμμένα, παρουσιάζει μία ακόμη δυσκολία για τους μαθητές καθώς δεν είναι ορατή «με το μάτι» η παραλληλία των πλευρών και η ισότητα των γωνιών. Οι μαθητές εκεί δεν ξέρουν πώς να τοποθετήσουν σωστά τις πλευρές στην αναλογία. Ο στόχος της δραστηριότητας 5.1 είναι να βοηθήσει στην υπερπήδηση αυτής δυσκολίας.

Τέλος παρουσιάζεται κι ένα παράδειγμα για την ομοιότητα ορθογωνίων όπου οι μαθητές θα πρέπει να αφεθούν να ψάξουν ποια ορθογώνια είναι όμοια και να το αιτιολογήσουν.

Οδηγίες για την τροχιά «Μέτρηση»

Μέτρηση μήκους

Στόχος 1ος: η μέτρηση με μη-τυπικές μονάδες μέτρησης. Τονίζεται ότι η μέτρηση ενός μήκους α είναι η σύγκρισή του με ένα άλλο μήκος β το οποίο καλούμε μονάδα μέτρησης και η επιλογή του είναι αυθαίρετη.

Στόχος 2ος: Οι τυπικές μονάδες μέτρησης, μέτρο, εκατοστό, κ.λπ. Η μετάβαση από μία μονάδα μέτρησης σε άλλη.

Μέτρηση γωνίας

Η μέτρηση της γωνίας έχει άρρηκτη σχέση με τον κύκλο. Η γωνία που θέλουμε να μετρήσουμε γίνεται επίκεντρη και ως μονάδα μέτρησης της ορίζεται η μοίρα, η οποία είναι το $\frac{1}{360}$ του οποιουδήποτε κύκλου της. Η ακτίνα του κύκλου της γωνίας δεν έχει σημασία αντίθετα με το τόξο, που το μέτρο του βρίσκεται σε απόλυτη σχέση με τον κύκλο στον οποίο βρίσκεται.

Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει το μοιρογνωμόνιο ως ένα ημικύκλιο κάποιας ακτίνας. Σύμφωνα με όσα ορίσαμε παραπάνω η γωνία που θέλουμε να μετρήσουμε πρέπει να γίνει επίκεντρη σε αυτόν τον κύκλο και γι' αυτό τοποθετούμε το κέντρο του ημικυκλίου στην κορυφή της. Για να ξεκινήσουμε από την μέτρηση θα πρέπει η μία πλευρά της γωνίας να τοποθετηθεί στην οριζόντια διάμετρο. Παρ' όλα αυτά μπορεί στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός να βάλει και το ερώτημα εάν αυτό είναι τελικά τόσο δεσμευτικό. Αφού τα παιδιά μάθουν να χρησιμοποιούν το μοιρογνωμόνιο για να μετρήσουν μία γωνία, η παραπάνω αρχή ότι η ακτίνα του κύκλου δεν έχει καμία σημασία μπορεί να αναδειχθεί μέσα από μετρήσεις με διαφορετικού τύπου μοιρογνωμόνια. Εάν δεν υπάρχουν μοιρογνωμόνια, τότε και μόνο η ομαδική προσπάθεια κατασκευής ενός τέτοιου με τη βοήθεια και την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, θα εκπλήρωνε με τον καλύτερο τρόπο τον στόχο της μέτρησης μιας γωνίας.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στα ακόλουθα ερωτήματα:

- Τι είδους γωνίες μετράει ένα μοιρογνωμόνιο; (ο στόχος είναι να καταλάβουν οι μαθητές ότι ένα μοιρογνωμόνιο μετράει μόνο κυρτές γωνίες)
- Πώς θα μετρήσουμε μία μη - κυρτή γωνία; (στόχος ο υπολογισμός της μη - κυρτής από την κυρτή αφού κυρτή + μη-κυρτή =360^o)
- Έχει σημασία το μέγεθος από το μοιρογνωμόνιο που θα χρησιμοποιήσουμε; Ναι ή όχι και γιατί; (για να γίνει εμφανές ότι οι πλευρές της γωνίας δεν έχουν πεπερασμένο μήκος και η ακτίνα του κύκλου στον οποίο είναι επίκεντρη δεν έχει σημασία)
- Μπορούμε να μετρήσουμε μία γωνία με το μοιρογνωμόνιο, τοποθετώντας το κέντρο του στην κορυφή της γωνίας αλλά χωρίς η μία πλευρά της γωνίας να ταυτίζεται με την οριζόντια διάμετρο από το μοιρογνωμόνιο; (αυτή η δραστηριότητα είναι μία καλή εφαρμογή για την πρόσθεση και την αφαίρεση γωνιών).

Η άσκηση που δίνεται σε αυτήν την ενότητα είναι ενδεικτική. Ο στόχος είναι να καταλάβουν πώς γίνεται η μέτρηση της γωνίας.

Εμβαδά και Πυθαγόρειο θεώρημα

Η έννοια του εμβαδού θεωρείται πρωταρχική έννοια για τα μαθηματικά και γενικότερα η τροχιά της μέτρησης, γι' αυτό εισάγεται από πολύ νωρίς στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η εφαρμογή τους σε καθημερινά προβλήματα είναι ένας από τους λόγους που η πλειοψηφία των ανθρώπων χαρακτηρίζουν τα μαθηματικά "χρήσιμα".

Στο βιβλίο, αρχικά η προσέγγιση είναι σε καθαρά γεωμετρικό πλαίσιο με άμεση σύγκριση επιφανειών, στη συνέχεια σε ένα γεωμετρικό – αριθμητικό πλαίσιο όπου αναδεικνύεται η εισαγωγή της μονάδας μέτρησης και τέλος σε ένα αριθμητικό πλαίσιο με τη χρήση τύπων. Αναπτύσσεται η στατική αντίληψη για την έννοια του εμβαδού (ως μία κλειστή περιοχή που ποσοτικοποιείται) αλλά και η δυναμική αντίληψη (ως επιφάνειες που μπορούν να μετασχηματιστούν κρατώντας αναλλοίωτα κάποια χαρακτηριστικά τους). Το υλικό σχεδιάστηκε έτσι ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν τόσο τις έννοιες όσο και τις διαδικασίες.

Βασικά χαρακτηριστικά:

- Το κεφάλαιο ξεκινά από άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις με συστηματικές επικαλύψεις της μονάδας. Έτσι γίνεται η σύνδεση των συνεχών χαρακτηριστικών μιας επιφάνειας με διακριτά μεγέθη, τις μονάδες. Αρχικά με άτυπες μονάδες και στη συνέχεια με τυπικές. Οι μαθητές αναλύουν, συνθέτουν και μετατοπίζουν σχήματα με στόχο να αντιληφθούν το αμετάβλητο της επιφάνειας, καθώς και τους τρόπους μέτρησής της. Δομούν ορθογώνιες επιφάνειες και χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική σχέση υπολογίσουν το εμβαδόν επιφανειών. Διερευνούν τη σχέση εμβαδού και περιμέτρου ενός σχήματος. Διερευνούν το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου και υπολογίζουν στη συνέχεια πιο σύνθετα σχήματα με τυπικές και άτυπες μονάδες. Κάνουν μετατροπές στις τυπικές μονάδες επιφάνειας (τετραγωνικό μέτρο και υποδιαιρέσεις του).
- Διερευνούν το εμβαδόν των βασικών σχημάτων (παραλληλόγραμμο, τρίγωνο, τραπέζιο) και ανακαλύπτουν τους τύπους υπολογισμού τους χρησιμοποιώντας τις μετατοπίσεις επιφανειών.

- Επιλύουν προβλήματα με μέτρηση επιφανειών με χρήση γεωμετρικών οργάνων και τύπων και κάνουν εκτιμήσεις.
- Ανακαλύπτουν το πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του και τα χρησιμοποιούν για να λύνουν προβλήματα.
- Ψηφιακά υπάρχει ένα πλούσιο υλικό με δραστηριότητες, βίντεο και συνδέσμους σε μικροπειράματα που αναπτύσσουν τη μαθηματική σκέψη. Θα πρέπει να το μελετήσει ο εκπαιδευτικός και γνωρίζοντας το πλαίσιο της τάξης του να το αξιοποιήσει όπως εκείνος θεωρεί καλύτερα.

Πιο αναλυτικά:

➢ Στην παράγραφο ***«§1. Η έννοια του εμβαδού- Εμβαδόν ορθογωνίου – Μονάδες μέτρησης»*** οι μαθητές αρχικά συζητούν για την έννοια της επιφάνειας, κατασκευάζουν σχήματα με το τάγκραμ, για να κατανοήσουν το αμετάβλητο της επιφάνειας, μετρούν επιφάνειας με άτυπες μονάδες και διαπραγματεύονται την έννοια του εμβαδού. Στη συνέχεια, μετρούν σχήματα με μονάδα το τετραγωνικό εκατοστό, συζητούν για το εμβαδόν ορθογωνίου και οδηγούνται στην πολλαπλασιαστική σχέση. Διερευνούν τη σχέση εμβαδού και περιμέτρου ενός σχήματος σε δύο περιπτώσεις, στην πρώτη βρίσκουν την περίμετρο σχημάτων με το ίδιο εμβαδόν, ενώ στη δεύτερη κατασκευάζουν και βρίσκουν το εμβαδόν σχημάτων με την ίδια περίμετρο. Στη συνέχεια, αφού συζητήσουν για το εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου, βρίσκουν το εμβαδόν σύνθετων σχημάτων αναλύοντας, συνθέτοντας και μετατοπίζοντας σχήματα. Τέλος εισάγονται στο τετραγωνικό μέτρο και στις υπόλοιπες υποδιαιρέσεις του και κάνουν μετατροπές από τη μία μονάδα στην άλλη.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Στην 1.1(β) χρησιμοποιείται το τάγκραμ για τη διαισθητική αντίληψη του αναλλοίωτου στο μετασχηματισμό μιας επιφάνειας που διατηρεί ίσες τις πλευρές και τις γωνίες. Στην τελευταία σελίδα υπάρχει ένα τάγκραμ που μπορούν να το κόψουν οι μαθητές και να συνθέσουν σχήματα. Προτείνεται να κατασκευαστεί ένα τουλάχιστον σχήμα στην τάξη και να παρακινηθούν οι μαθητές να κατασκευάσουν και άλλα στο σπίτι.

- Στην 1.7-Β μέσα από την αφήγηση παρουσιάζονται τρεις βασικοί τρόποι υπολογισμού σύνθετων σχημάτων. Αντί να παρουσιαστούν, θα ήταν προτιμότερο να ζητήσει ο εκπαιδευτικός να βρουν το εμβαδόν του σχήματος αναμένοντας ότι μπορούν να αναδυθούν οι ίδιες στρατηγικές.
- Για την 1.7-Γ είναι σημαντικό να αναπτύξουν τις σκέψεις τους οι μαθητές και να αναδειχθούν όλες οι στρατηγικές μέσα στην τάξη και να συζητηθούν. Θα προτείναμε να ζητηθεί από τους μαθητές να ομαδοποιήσουν τις στρατηγικές που ακούστηκαν.

➢ Στην παράγραφο ***«§2. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων»*** διαπραγματεύονται τα εμβαδά του παραλληλογράμμου, του τριγώνου και του τραπεζίου. Επειδή οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατασκευή των υψών σε παραλληλόγραμμο και στο τρίγωνο (ιδίως όταν η βάση δεν είναι η οριζόντια ή όταν το ύψος είναι έξω από το σχήμα) υπάρχουν εισαγωγικές δραστηριότητες. Βρίσκουν το εμβαδόν παραλληλογράμμου και τριγώνου χρησιμοποιώντας όλες τις βάσεις τους, γιατί συνήθως αναγνωρίζουν ως βάση μόνο μία πλευρά. Αναδεικνύεται η δυναμική αντίληψη της επιφάνειας που παραμένει αναλλοίωτη όταν παραμένει ίδια η βάση και το ύψος, στα παραλληλόγραμμα και στα τρίγωνα. Επιλύουν προβλήματα και υπολογίζουν εμβαδά σύνθετων σχημάτων χρησιμοποιώντας τους τύπους.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Στην 2.1(β) αφήνουμε τους μαθητές να αναπτύξουν τις στρατηγικές τους. Είναι πολύ πιθανό να προκύψει η στρατηγική της μετατόπισης που περιγράφεται στην 2.1(γ).
- Στην 2.1(ε) ζητάμε να βρουν τα εμβαδά μετρώντας και στη συνέχεια να τα βρουν χρησιμοποιώντας διαφορετική βάση. Είναι πολύ πιθανό λόγω στρογγυλοποιήσεων, να προκύψουν διαφορετικά αποτελέσματα και μια καλή ευκαιρία να συζητήσουμε για τα σφάλματα στις μετρήσεις, κατά πόσο είναι αναπόφευκτα σε πραγματικά προβλήματα και πως μπορούμε να κάνουμε καλύτερες εκτιμήσεις περιορίζοντας τα σφάλματα.

- Στην 2.2 μπορούμε να τους θέσουμε επιπλέον το ερώτημα: «αν δηλαδή το ΖΕ απομακρυνθεί πάνω στην (ζ) σε μία τεράστια απόσταση, τα δύο παραλληλόγραμμα θα έχουν το ίδιο εμβαδόν;».
- Στη 2.4-Γ(α) τα (β) και (δ) έχουν εμβαδόν 10 cm^2 ενώ τα άλλα 9 cm^2. Έχει ενδιαφέρον τι θα πουν αρχικά για το (δ). Άλλοι μπορεί να “δουν” μια μεγάλη περίμετρο ενώ άλλοι ένα “στενό” τρίγωνο.
- Στη 2.5-Β διερευνάται ξανά το ίδιο ουσιαστικά με τη 2.2. Θα μπορούσε να τεθεί ως πρόβλημα για το σπίτι, αφού παρόμοια λογική έχει ήδη αναπτυχθεί.
- Στη 2.6-Β όλα είναι τραπέζια αλλά ίσως οι μαθητές δυσκολευτούν να αναγνωρίσουν τις περιπτώσεις (δ) και (ε).

➢ Στην παράγραφο ***«§3.Πυθαγόρειο θεώρημα»*** επιλέξαμε για το πυθαγόρειο θεώρημα ένα σενάριο με αφήγηση και διερεύνηση έχοντας ως στόχο την διαισθητική του προσέγγιση με μετασχηματισμούς που οδηγούν σε ισοδύναμες επιφάνειες. Το πυθαγόρειο παρουσιάζεται ορθά ως μία σχέση **εμβαδών και όχι** μηκών. Στην επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια του πυθαγορείου θεωρήματος τα νούμερα είναι «βολικά» καθώς οι μαθητές δεν μάθει ακόμα τις τετραγωνικές ρίζες.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

- Η 3.1 ξεκινά με το πρόβλημα διπλασιασμού μιας επιφάνειας η οποία στη συνέχεια οδηγεί στο πυθαγόρειο θεώρημα. Στο τέλος υπάρχει η υπενθύμιση για τις ονομασίες «κάθετη πλευρά» και «υποτείνουσα» και αφήνεται στην κρίση του εκπαιδευτικού εάν θέλει να τις αναφέρει από την αρχή.

Οδηγίες για την τροχιά «Στοχαστικά Μαθηματικά»

Στατιστική

Η ενότητα *Στατιστική* περιέχει κάποιες βασικές έννοιες και διαδικασίες της περιγραφικής Στατιστικής. Αρχικά, η έμφαση δίνεται στη σημασία της στατιστικής μελέτης και στα διαφορετικά **στάδια** που περιλαμβάνει: (α) διατύπωση ενός ερωτήματος για εξερεύνηση, (β) συλλογή των δεδομένων, (γ) οργάνωση, αναπαράσταση των δεδομένων, (δ) ερμηνεία των αποτελεσμάτων και εξαγωγή συμπερασμάτων σε σχέση με το ερώτημα. Να σημειωθεί ότι, από την αρχή, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή του εκπαιδευτικού για το σχετικό λεξιλόγιο της Στατιστικής.

Έπειτα, οι μαθητές διερευνούν τη αναγκαιότητα της οργάνωσης και της αναπαράστασης των δεδομένων, μαθαίνουν τρόπους οργάνωσης δεδομένων σε πίνακα συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων, την ανάγνωση των διαγραμμάτων και πώς να αντλούν πληροφορίες από πίνακες και διαγράμματα (δεν ζητείται σ' αυτό το υλικό να μάθουν οι μαθητές να κατασκευάζουν τα διαγράμματα).

Τέλος, οι μαθητές εισάγονται στην έννοια του μέσου όρου και του εύρους, μαθαίνουν να τα ερμηνεύουν και να εξάγουν συμπεράσματα.

Κρίσιμα ερωτήματα και παρατηρήσεις:

Δραστηριότητα 1.1	Να δοθεί μεγάλη έμφαση στην αναγκαιότητα της στατιστικής έρευνας όταν πρέπει να ληφθεί μία απόφαση. Να γίνει εδώ και αναφορά στη μεταβλητότητα που υπάρχει στα δεδομένα αλλά και γύρω μας, και ότι είναι ένας βασικός λόγος της ύπαρξης της Στατιστικής.
Δραστηριότητα 2.1	Αν είναι ανάγκη, ο εκπαιδευτικός να δώσει κάποιες ασκήσεις πριν τη δραστηριότητα για εξοικείωση με πίνακες.

Άσκηση 3.4	Προτείνεται να γίνεται συζήτηση για αιτιολόγηση της επιλογής και για την απόρριψη των άλλων περιπτώσεων.
Άσκηση 4.2	Προτείνεται να γίνεται συζήτηση για το λόγο που παρουσιάστηκαν τα δεδομένα με αυτόν τον τρόπο στον πίνακα, δηλαδή σε ομάδες.
Άσκηση 4.3	Οι μαθητές θα πρέπει να αιτιολογήσουν την επιλογή τους.
Δραστηριότητα 5.1	Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να τονίσει στο ότι η μέση τιμή εκφράζει την έννοια της «δίκαιης μοιρασιάς», είναι «το σημείο ισορροπίας» των δεδομένων.
Άσκηση 5.1	Να τονίσει ο εκπαιδευτικός στην αλλαγή που προκαλεί οι «ακραίες» τιμές στη μέση τιμή.
Άσκηση 5.2	Σ' αυτήν την άσκηση, να αναφερθεί ότι η μέση τιμή δίνει μία συνοπτική περιγραφήτων δεδομένων και έτσι χρησιμοποιείται για τη σύγκριση δύο συνόλων δεδομένων. Στην τελευταία ερώτηση αναμένεται η απάντηση με βάση του εύρους.
Άσκηση 5.3	Σ' αυτήν την άσκηση, προτείνεται η εξήγηση των απαντήσεων και η συζήτηση στην τάξη.